Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Προφανής)**.** Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\emptyset \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση $\leq'$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y **που ανήκουν στο υποσύνολο** P'.

Δείξτε ότι η $\leq'$ είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ της $\leq'$ δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Το ζεύγος $(P', \leq')$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(P, \leq)$ και η σχέση $\leq'$ ονομάζεται **ο περιορισμός της** $\leq$ στο σύνολο P'. Συνήθως συμβολίζουμε την $\leq'$ πάλι με $\leq$ όταν είναι σαφές σε ποιον χώρο αναφερόμαστε. Για παράδειγμα λέμε ότι ο $(P', \leq)$ είναι υπόχωρος του $(P, \leq)$.

Άσκηση 2 (Αντίστροφη Διάταξη)**.** Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ στο P ως εξής:

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x, y \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος $(P, \trianglelefteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι: α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη $\leq$ τότε τι είναι αντίστοιχα το a ως προς τη διάταξη $\trianglelefteq$;

Σημείωση: Η σχέση $\trianglelefteq$ είναι η **αντίστροφη διάταξη** της $\leq$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{(0,0), (0,1)\} \cup \{(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1\}$$

όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ ως εξής:

$$(i, x) \leq (j, y) \iff i = j \ \& \ x \leq_{\mathbb{N}} y$$

όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών και S η συνάρτηση του επομένου στο $\mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι ο $(P, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Αναπαραστήστε τον χώρο $(P, \leq)$ με ένα διάγραμμα στο επίπεδο.

(iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του $(P, \leq)$.

(iv) Δείξτε ότι το $(0, 1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του $(P, \leq)$.

(v) Εξηγείστε γιατί ο $(P, \leq)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι **πεπερασμένο σύνολο** τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 4 (Απαιτητική)**.** Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P, ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική)**.** Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$ και ένα **πεπερασμένο** $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S, δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S.

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **μοναδικό μεγιστικό** στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.

Άσκηση 6.

(i) Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$ και το σύνολο

$$\text{Chains}(P) = \{S \subseteq P \mid \text{το } S \text{ είναι αλυσίδα στον } (P, \leq)\}.$$

Στον Chains(P) ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ ως εξής:

$$S \trianglelefteq T \iff S \subseteq T$$

όπου τα S, T είναι αλυσίδες στον $(P, \leq)$. Δείξτε ότι ο χώρος (Chains$(P), \trianglelefteq)$ είναι επαγωγικός.

(ii) Με βάση τις γνωστές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ εξηγείστε γιατί το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών είναι επαγωγικός χώρος.

(iii) Εξηγήστε γιατί τα διαστήματα $(0, 1]$ και $[0, 1)$ με τη συνήθη διάταξη του $\mathbb{R}$ **δεν** είναι επαγωγικοί χώροι.

Άσκηση 7 (Ισοδύναμες Διατυπώσεις του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου, Bourbaki-Witt, Zermelo)**.** Δείξτε ότι οι ακόλουθες δύο διατυπώσεις του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου είναι ισοδύναμες.

1η μορφή. Δίνεται ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ και μια απεικόνιση $\pi : P \to P$ με $x \leq \pi(x)$ για κάθε $x \in P$. Αν ο $(P, \leq)$ είναι επαγωγικός, τότε υπάρχει $x \in P$ με $\pi(x) = x$.

2η μορφή. Δίνεται ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$, $a \in P$ και μια απεικόνιση $\pi : P \to P$ με $x \leq \pi(x)$ για κάθε $x \in P$. Αν κάθε *μη κενή* αλυσίδα στον $(P, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε υπάρχει $x \in P$ με $a \leq x$ και $\pi(x) = x$.