Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και θέτουμε $1 = S0$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού: $n \cdot 0 = 0$ και $n \cdot Sm = (n \cdot m) + n$, για $n, m \in \mathbb{N}$.

Ακολουθούμε τη συνηθισμένη προτεραιότητα των πράξεων δίνοντας προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό έναντι της πρόσθεσης. Επομένως η παράσταση $(n \cdot m) + n$ θα συμβολίζεται και πιο απλά με $n \cdot m + n$.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

Σχετικά με την πρώτη ισότητα έχουμε για $n = 0$,

$$S0 = 1 \quad (\text{εξ ορισμού του } 1) \quad \text{και} \quad n + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Άρα $S0 = 0 + 1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $Sn = n + 1$. Τότε

$$\begin{aligned} SSn &= S(n+1) \quad (\text{Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= n + S1 \quad (\text{εξ ορισμού}) \\ &= Sn + 1 \quad (\text{γνωστό Λήμμα}). \end{aligned}$$

2ος τρόπος (πιο σύντομος): Έχουμε

$$n + 1 = n + S0 = S(n + 0) = Sn$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του 1 και στις άλλες δύο τον ορισμό της πρόσθεσης.

Σχετικά με το δεύτερο ζητούμενο παρατηρούμε πρώτα ότι $n \cdot 1 = n \cdot S0 = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$ από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού και τις ιδιότητες της πρόσθεσης.

Τέλος αποδεικνύουμε την ισότητα $1 \cdot n = n$ με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ έχουμε από τον ορισμό,

$$1 \cdot 0 = 0 = n.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 \cdot n = n$. Τότε

$$\begin{aligned} 1 \cdot Sn &= 1 \cdot n + 1 \quad (\text{εξ ορισμού}) \\ &= n + 1 \quad (\text{Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= Sn \quad (\text{από την πρώτη ισότητα}). \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x5.1)**.** Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Λύση.
Με επαγωγή στο k. Για $k = 0$ έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad n \cdot (m \cdot 0) = n \cdot 0 = 0,$$

για κάθε n, m. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot Sk)$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned}(n \cdot m) \cdot Sk &= (n \cdot m) \cdot k + (n \cdot m) \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}.\end{aligned}$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned}n \cdot (m \cdot Sk) &= n \cdot ((m \cdot k) + m) \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) \quad \text{(επιμεριστική ιδιότητα)}.\end{aligned}$$

Άρα

$$(n \cdot m) \cdot Sk = n \cdot (m \cdot k) + (n \cdot m) = n \cdot (m \cdot Sk)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x5.2 - Απαιτητική). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε n, m έχουμε

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Λύση.
Όπως και με την πρόσθεση χρειαζόμαστε πρώτα δύο βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $n \cdot 0 = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε την ισότητα $0 \cdot n = 0$ για κάθε n με επαγωγή n. Για $n = 0$ έχουμε $0 \cdot n = 0 \cdot 0 = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $0 \cdot n = 0$ για κάποιο n και έχουμε

$$0 \cdot Sn = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0,$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού και στη δεύτερη την Επαγωγική Υπόθεση.

Σχόλιο: Όπως και στην πρόσθεση χρειαζόμαστε να ξέρουμε τι γίνεται όταν το πρώτο όρισμα (δηλαδή η πρώτη μεταβλητή) της πράξης είναι ο επόμενος κάποιου αριθμού. Στην πρόσθεση αποδείξαμε ότι το $Sn+m$ είναι ίσο με $n + Sm$. Εδώ χρειαζόμαστε την αντίστοιχη ισότητα για το $Sn \cdot m$.

Λήμμα 2. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε $Sn \cdot m = (n \cdot m) + m$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο m. Για $m = 0$ έχουμε

$$Sn \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad (n \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο m έχουμε $Sn \cdot m = (n \cdot m) + m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι

$$Sn \cdot Sm = (n \cdot Sm) + Sm$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned}Sn \cdot Sm &= (Sn \cdot m) + Sn \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= [(n \cdot m) + m] + Sn \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}\\ &= (n \cdot m) + (m + Sn) \quad \text{(προσεταιρισμός πρόσθεσης)}\\ &= (n \cdot m) + (Sm + n) \quad \text{(γνωστό Λήμμα)}.\end{aligned}$$

[Στην τελευταία ισότητα, αντί του Λήμματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και την Άσκηση 1: $m + Sn = m + (n + 1) = (m + 1) + n = Sm + n$.]

Από την άλλη

$$\begin{aligned}(n \cdot Sm) + Sm &= [(n \cdot m) + n] + Sm \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= (n \cdot m) + (n + Sm) \quad \text{(προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)}\\ &= (n \cdot m) + (Sm + n) \quad \text{(αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης).}\end{aligned}$$

Άρα

$$Sn \cdot Sm = (n \cdot m) + (Sm + n) = (n \cdot Sm) + Sm$$

και έχουμε το ζητούμενο του λήμματος.

Τέλος δείχνουμε με επαγωγή στο m ότι $n \cdot m = m \cdot n$ για όλα τα n, m. Για $m = 0$ έχουμε

$$n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0 \quad \text{(από το Λήμμα 1 πιο πάνω)}$$

για κάθε n. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $n \cdot m = m \cdot n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι

$$n \cdot Sm = Sm \cdot n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned}n \cdot Sm &= (n \cdot m) + n \quad \text{(εξ ορισμού)}\\ &= (m \cdot n) + n \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση).}\end{aligned}$$

Από την άλλη

$$Sm \cdot n = (m \cdot n) + n \quad \text{(εφαρμόζουμε το Λήμμα 2 με το } m \text{ στη θέση του } n \text{ και αντιστρόφως).}$$

Άρα

$$n \cdot Sm = (m \cdot n) + n = Sm \cdot n$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x5.3)**.** Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$\begin{aligned}n^0 &= 1,\\ n^{Sm} &= n^m \cdot n,\end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$\begin{aligned}n^{m+k} &= n^m \cdot n^k,\\ n^{m \cdot k} &= (n^m)^k.\end{aligned}$$

Λύση.

Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο k. Στην πρώτη έχουμε για $k = 0$,

$$n^{m+k} = n^{m+0} = n^m = n^m \cdot 1 = n^m \cdot n^0 = n^m \cdot n^k$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$, όπου στην ισότητα $n^m = n^m \cdot 1$ χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m+k} = n^m \cdot n^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m+Sk} = n^m \cdot n^{Sk}$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}n^{m+Sk} &= n^{S(m+k)} \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης)}\\ &= n^{m+k} \cdot n \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)}\\ &= (n^m \cdot n^k) \cdot n \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}\\ &= n^m \cdot (n^k \cdot n) \quad \text{(προσεταιρισμός πολλαπλασιασμού)}\\ &= n^m \cdot n^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)}\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα κάνουμε πρώτα το εξής σχόλιο. Εφόσον έχουμε ορίσει την ύψωση σε δύναμη n^m για $n \neq 0$, για να έχει νόημα η έκφραση $(n^m)^k$ θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι $n^m \neq 0$ για κάθε m, n με $n \neq 0$. Αυτό αποδεικνύεται σχετικά εύκολα και το παίρνουμε δεδομένο σε αυτή την άσκηση.

Για $k = 0$ έχουμε,

$$n^{m \cdot k} = n^{m \cdot 0} = n^0 = 1 = (n^m)^0 = (n^m)^k,$$

για κάθε m, n με $n \neq 0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο k ισχύει $n^{m \cdot k} = (n^m)^k$, για κάθε m, n με $n \neq 0$. Δείχνουμε ότι

$$n^{m \cdot Sk} = (n^m)^{Sk}.$$

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} n^{m \cdot Sk} &= n^{m \cdot k + m} \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού)} \\ &= n^{m \cdot k} \cdot n^m \quad \text{(από την πρώτο ζητούμενο της άσκησης)} \\ &= (n^m)^k \cdot n^m \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= (n^m)^{Sk} \quad \text{(ορισμός ύψωσης σε δύναμη)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.4)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1$, $\cdot_1$ και $+_2$, $\cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 m) &= \pi(n) +_2 \pi(m) \\ \pi(n \cdot_1 m) &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m). \end{aligned}$$

Λύση.

Δείχνουμε και τις δύο ισότητες με επαγωγή στο $m \in \mathbb{N}_1$. Στην πρώτη για $m = 0_1$ έχουμε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n +_1 0_1) = \pi(n) = \pi(n) +_2 0_2 = \pi(n) +_2 \pi(0_1) = \pi(n) +_2 \pi(m),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n +_1 S_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 S_1 m) &= \pi(S_1(n +_1 m)) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_1\text{)} \\ &= S_2 \pi(n +_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \\ &= S_2(\pi(n) +_2 \pi(m)) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \pi(n) +_2 S_2 \pi(m) \quad \text{(ορισμός πρόσθεσης } +_2\text{)} \\ &= \pi(n) +_2 \pi(S_1 m) \quad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)} \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Στη δεύτερη ισότητα έχουμε για $m = 0_1$,

$$\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n \cdot_1 0_1) = \pi(0_1) = 0_2 = \pi(n) \cdot_2 0_2 = \pi(n) \cdot_2 \pi(0_1) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}_1$ ισχύει $\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_1$. Δείχνουμε ότι

$$\pi(n \cdot_1 S_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$. Έστω $n \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\begin{aligned}
\pi(n \cdot_1 S_1 m) &= \pi(n \cdot_1 m +_1 n) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_1\text{)} \\
&= \pi(n \cdot_1 m) +_2 \pi(n) \quad \text{(από το πρώτο ζητούμενο)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 \pi(m) +_2 \pi(n) \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 S_2 \pi(m) \quad \text{(ορισμός πολλαπλασιασμού } \cdot_2\text{)} \\
&= \pi(n) \cdot_2 \pi(S_1 m) \qquad \text{(ιδιότητες } \pi\text{)}
\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο.