

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και θέτουμε $1 = S0$.

Υπειθυμίζουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού: $n \cdot 0 = 0$ και $n \cdot Sm = (n \cdot m) + n$, για $n, m \in \mathbb{N}$.

Ακολουθούμε τη συνηθισμένη προτεραιότητα των πράξεων δίνοντας προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό έναντι της πρόσθεσης. Επομένως η παράσταση $(n \cdot m) + n$ θα συμβολίζεται και πιο απλά με $n \cdot m + n$.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x5.1). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x5.2 - Απαιτητική). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε n, m έχουμε

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x5.3). Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m ,

$$\begin{aligned} n^0 &= 1, \\ n^{Sm} &= n^m \cdot n, \end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$\begin{aligned} n^{m+k} &= n^m \cdot n^k, \\ n^{m \cdot k} &= (n^m)^k. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.4). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_2$ με

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1, \cdot_1$ και $+_2, \cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 m) &= \pi(n) +_2 \pi(m) \\ \pi(n \cdot_1 m) &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m). \end{aligned}$$