Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Σε αυτή την άσκηση πρέπει να πάρετε δεδομένο το **Θεώρημα Schröder-Bernstein**: για όλα τα σύνολα A, B, αν $A \leq_c B$ και αν $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$.

Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύουν τα εξής:

(i) $A \not<_c A$.

(ii) Αν $A \leq_c B$ και $B <_c C$ τότε $A <_c C$.

(iii) Αν $A <_c B$ και $B \leq_c C$ τότε $A <_c C$.

Άσκηση 2. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 3. Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός π μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Σχόλιο: Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής.

Άσκηση 4 (Κατασκευή και Ιδιότητες του συνόλου Cantor)**.** Δοσμένου ενός κλειστού διαστήματος $I = [a, b]$ με $a < b$ ορίζουμε $\mathcal{L}I$ να είναι το πρώτο $1/3$ του I και $\mathcal{R}I$ το τελευταίο $1/3$ του I (κλειστά διαστήματα). Δηλαδή

$$\mathcal{L}I = \left[a, a + \frac{1}{3} \cdot (b-a)\right] \qquad \text{και} \qquad \mathcal{R}I = \left[a + \frac{2}{3} \cdot (b-a), b\right].$$

Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \in \mathbb{N}$ τα υποσύνολα $(F_i^n)_{i=1,\ldots,2^n}$ του $[0,1]$ ως εξής:

$$F_1^0 = [0,1]$$

$$F_i^{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}F_j^n, & \text{αν } i = 2j-1 \\ \mathcal{R}F_j^n, & \text{αν } i = 2j \end{cases}, \quad \text{όπου } i = 1, \ldots, 2^{n+1}.$$

Δηλαδή

$$F_{2j-1}^{n+1} = \mathcal{L}F_j^n \qquad \text{και} \qquad F_{2j}^{n+1} = \mathcal{R}F_j^n.$$

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι αν $i = 2j-1$ ή αν $i = 2j$ και $i \in \{1, \ldots, 2^{n+1}\}$ τότε $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$. Επομένως το σύνολο F_j^n έχει οριστεί και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό του F_i^{n+1}. Θα δείξουμε επιπλέον ότι κάθε F_j^n είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα, και άρα ο πιο πάνω ορισμός έχει νόημα.

Το **σύνολο Cantor** είναι το

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^n} F_i^n.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Για κάθε n, j το F_j^n είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα μήκους $1/3^n$ - ειδικότερα οι εκφράσεις $\mathcal{L}F_j^n$ και $\mathcal{R}F_j^n$ έχουν νόημα.

(ii) Για κάθε n τα σύνολα $F_1^n, \dots, F_{2^n}^n$ είναι ξένα ανά δύο.
Υπόδειξη. Δοσμένων F_i^{n+1} και $F_{i'}^{n+1}$ διακρίνετε περιπτώσεις όπου τα i, i' είναι διαδοχικοί φυσικοί και όπου δεν είναι.

(iii) Για κάθε $\alpha \in \Delta =$ το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών, ορίζουμε την ακολουθία $(I_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $[0,1]$ ως εξής:

$$I_0^\alpha = \begin{cases} F_1^1, & \text{αν } \alpha(0) = 0, \\ F_2^1, & \text{αν } \alpha(0) = 1, \end{cases} \qquad I_{n+1}^\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}I_n^\alpha & \text{αν } \alpha(n+1) = 0, \\ \mathcal{R}I_n^\alpha, & \text{αν } \alpha(n+1) = 1. \end{cases}$$

Τότε για κάθε α και κάθε n υπάρχει $j_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ με $I_n^\alpha = F_{j_n}^n$. Συμπεράνετε ότι η ακολουθία $(I_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από κλειστά διαστήματα και ότι μήκος$(I_n^\alpha) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iv) Η συνάρτηση

$$f : \Delta \to C : f(\alpha) = \text{το μοναδικό σημείο της τομής } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n^\alpha$$

είναι καλά ορισμένη.

(v) (Απαιτητική) Η προηγούμενη συνάρτηση f είναι $1-1$.
Υπόδειξη. Δείξτε ότι αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $I_n^\alpha = I_n^\beta$.

(vi) (Απαιτητική) Η προηγούμενη συνάρτηση f είναι επί.

Άσκηση 5 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι $1-1$ και επί, όπου Δ είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 6. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.