Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

12ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x7.23)**.** Δείξτε ότι $\chi([0,n)) =_o [0,n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Με $\chi(A)$ εννοούμε τον χώρο Hartogs του συνόλου A.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το Αξίωμα Επιλογής: για κάθε συνόλα A, B, P με $P \subseteq A \times B$,

αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $(x,y) \in P$, τότε υπάρχει $f : A \to B$ με $(x, f(x)) \in P$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Για κάθε μη κενό σύνολο A υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow A$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(A)$.

(iii) Για κάθε μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ το γινόμενο $\prod\limits_{i\in I} A_i$ είναι μη κενό.

Άσκηση 3. Θεωρούμε μη κενά σύνολα A, B και μια συνάρτηση $f : A \to B$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μεγιστικό μη κενό σύνολο $C \subseteq A$ πάνω στο οποίο η f είναι 1-1, δηλαδή ο περιορισμός $f \upharpoonright C$ είναι 1-1 και για κάθε $D \subseteq A$ για το οποίο η $f \upharpoonright D$ είναι 1-1, το C δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του D.