Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

10ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ ορίζουμε

$$S_U(x) \equiv Sx = \min\{y \in U \mid x < y\}, \text{ εφόσον υπάρχει } y \in U \text{ με } x < y$$
$$seg(x) = \{y \in U \mid y < x\},$$

όπου $x \in U$.

Για δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$ και $(V, \leq_V)$ ορίζουμε $U =_o V$ αν υπάρχει $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V$ 1-1 και επί που **σέβεται τις διατάξεις**, δηλαδή για κάθε $x, y \in U$ ισχύει

$$x \leq_U y \iff \pi(x) \leq_V \pi(y).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο U είναι **όμοιος** με τον V και η πιο πάνω π ονομάζεται **ομοιότητα**.

Σχόλιο. Η έννοια της ομοιότητας ορίζεται και μεταξύ μερικά διατεταγμένων χώρων με τον ίδιο τρόπο, αλλά εμείς θα περιοριστούμε σε ομοιότητες μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.

Άσκηση 1. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος. Δείξτε ότι για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$seg(Sx) = seg(x) \cup \{x\}.$$

Λύση.

Έστω $x \in U$. Αν $y \in seg(x) \cup \{x\}$, δηλαδή αν $y \leq x$, αφού $x < Sx$ θα έχουμε $y < Sx$. Άρα $seg(x) \cup \{x\} \subseteq seg(Sx)$. Θεωρούμε $y < Sx$. Αν είχαμε $x < y$ επειδή $Sx = \min\{z \in U \mid x < z\}$ θα είχαμε $Sx \leq y$ που είναι άτοπο. Άρα $x \nless y$ δηλαδή $y \leq x$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Λύση.

Έστω $S \subseteq U$. (Το S είναι φυσικά αλυσίδα γιατί ο $(U, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένος χώρος.) Θεωρούμε το σύνολο

$$UB = \{y \in U \mid (\forall x \in S)[x \leq y]\}$$

των άνω φραγμάτων (upper bounds) του συνόλου S. Το $\max U$, που υπάρχει από την υπόθεσή μας, ικανοποιεί $x \leq \max U$ για κάθε $x \in S$. Επομένως $\max U \in UB$ και $UB \neq \emptyset$.

Εφόσον ο U είναι καλά διατεταγμένος χώρος υπάρχει το $\min UB$, δηλαδή το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του S. Αυτό σημαίνει $\sup S = \min UB$.

Άσκηση 3. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος και $V \subseteq U$. Το V ονομάζεται **αρχικό τμήμα** του U αν για κάθε $y \in V$ και κάθε $x \in U$, αν $x \leq y$ τότε $x \in V$. Με άλλα λόγια το V "δεν παραλείπει" τα μικρότερα στοιχεία.

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το V είναι αρχικό τμήμα του U.

(ii) Είτε $V = U$ είτε υπάρχει $x \in U$ με $V = seg(x)$.

Λύση.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτουμε ότι $V \neq U$ και βρίσκουμε $x \in U$ με $V = seg(x)$. Τότε $U \setminus V \neq \varnothing$ και αφού ο U είναι καλά διατεταγμένος χώρος υπάρχει το $x = \min(U \setminus V)$.

Δείχνουμε ότι $V = seg(x)$. Έστω $y \in V$. Αν είχαμε $y \notin seg(x)$ τότε $x \leq y$. Αφού το V είναι αρχικό τμήμα του U και $y \in V$ προκύπτει $x \in V$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $x = \min(U \setminus V) \in U \setminus V$, δηλαδή $x \notin V$. Άρα $V \subseteq seg(x)$. Αντίστροφα αν $y \in seg(x)$ τότε $y < x = \min(U \setminus V)$ και ειδικότερα $y \notin U \setminus V$. Επομένως $y \in V$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Αν $V = U$ το ζητούμενο είναι προφανές. Αν $V = seg(x)$ θεωρούμε $y \in V$ και $x' \in U$ με $x' \leq y$. Τότε $x' \leq y < x$ και άρα $x' < x$, δηλαδή $x' \in seg(x) = V$ που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x7.1)**.** Δείξτε ότι κάθε γραμμική διάταξη ενός πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι κάθε μερική διάταξη σε ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο. (Άσκηση σε προηγούμενο φυλλάδιο.)

Λύση.

Έστω P πεπερασμένο σύνολο και $\leq$ μια γραμμική διάταξη στο P. Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq P$. Τότε το A είναι πεπερασμένο και με τον περιορισμό της $\leq$ στο A είναι ένας διατεταγμένος χώρος. Σύμφωνα με την υπόδειξη το A έχει ελαχιστικό στοιχείο x. Δηλαδή για κάθε $y \in A$ ισχύει $y \nless x$ και αφού η $\leq$ είναι γραμμική έχουμε $x \leq y$. Άρα $x = \min A$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$, $(V, \leq_V)$. Δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \pi(0_U) &= 0_V \\ \pi(S_U(x)) &= S_V(\pi(x)) && \text{αν } x \in U, \\ \pi(y) &= \sup\{\pi(x) \mid x <_U y\} && \text{αν } y \text{ οριακό σημείο.} \end{aligned}$$

Λύση.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $\pi_1, \pi_2 : U \to V$ που ικανοποιούν τις προηγούμενες εξισώσεις και δείχνουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι για κάθε $y \in U$ ισχύει $\pi_1(y) = \pi_2(y)$.

Για $y = 0_U$ έχουμε $\pi_1(0_U) = 0_V = \pi_2(0_U)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $y \in U$ ισχύει

$$(\forall x <_U y)[\pi_1(x) = \pi_2(x)].$$

Δείχνουμε ότι $\pi_1(y) = \pi_2(y)$. Αν ο y είναι επόμενος, τότε υπάρχει $x \in U$ με $y = S_U(x)$. Τότε

$$\begin{aligned} \pi_1(y) &= \pi_1(S_U(x)) \\ &= S_V(\pi_1(x)) && (\text{ιδιότητες } \pi_1) \\ &= S_V(\pi_2(x)) && (\text{επαγωγική υπόθεση, } x <_U S_U(x) = y) \\ &= \pi_2(S_U(x)) && (\text{ιδιότητες } \pi_2) \\ &= \pi_2(y). \end{aligned}$$

Αν το y είναι οριακό σημείο του U, τότε

$$\begin{aligned} \pi_1(y) &= \sup\{\pi_1(x) \mid x <_U y\} && (\text{ιδιότητες } \pi_1) \\ &= \sup\{\pi_2(x) \mid x <_U y\} && (\text{επαγωγική υπόθεση}) \\ &= \pi_2(y) && (\text{ιδιότητες } \pi_2). \end{aligned}$$

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο

$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$

(όπου $0 = \varnothing$ και $1 = \{\varnothing\}$) μαζί με τη διάταξη

$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \,\&\, x \leq_P y] \vee [i = j = 1 \,\&\, x \leq_Q y] \vee [i = 0 \,\&\, j = 1]$$

όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:

$$\underbrace{\underset{(0,0_U)}{\blacksquare} \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \underset{(0,x)}{\bullet} \quad \cdots}_{\{0\}\times U} \qquad \underbrace{\underset{(1,0_V)}{\blacksquare} \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \underset{(1,y)}{\bullet} \quad \cdots}_{\{1\}\times V}$$

Άσκηση 6 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε στα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_0 \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_0 \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.

Λύση.

(i) Έστω $\pi_1 : U \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow U'$ και $\pi_2 : V \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V'$ ομοιότητες. Ορίζουμε

$$\pi : (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times V) \to (\{0\} \times U') \cup (\{1\} \times V')$$

με $\pi(0, x) = (0, \pi_1(x))$ και $\pi(1, y) = (1, \pi_2(y))$, όπου $x \in U$ και $y \in V$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η π είναι ομοιότητα.

(ii) Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} U + (V + W) &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times (V + W)) = (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times [(\{0\} \times V) \cup (\{1\} \times W)]) \\ &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times \{0\} \times V) \cup (\{1\} \times \{1\} \times W). \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$(U + V) + W = (\{0\} \times \{0\} \times U) \cup (\{0\} \times \{1\} \times V) \cup (\{1\} \times W).$$

Οπότε ορίζουμε

$$\pi : U + (V + W) \to (U + V) + W : \pi(0, x) = (0, 0, x), \quad \pi(1, 0, y) = (0, 1, y), \quad \pi(1, 1, z) = (1, z)$$

όπου $x \in U$, $y \in V$ και $z \in W$.

(iii) Ο $U + \{0\} = (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times \{0\}) = (\{0\} \times U) \cup \{(1, 0)\}$ είναι όμοιος με τον **επόμενο** $Succ(U)$ του U, δηλαδή τον χώρο που προκύπτει αν τοποθετήσουμε το στοιχείο $r(U) \notin U$ "μετά" από όλα τα στοιχεία του U. Η ομοιότητα από τον $U + \{0\}$ στον $Succ(U)$ απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου $(\{0\} \times U) \cup \{(1, 0)\}$ ως εξής: $(0, x) \mapsto x$ και $(1, 0) \mapsto r(U)$.

(iv) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $U + V = (\{0\} \times U) + (\{1\} \times V)$.

1η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) \neq \varnothing$. Τότε για να βρούμε το ελάχιστο του A θα κοιτάξουμε μέσα στον U. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{x \in U \mid (0, x) \in A\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του U και συνεπώς υπάρχει το $\min B \in U$. Δείχνουμε ότι $(0, \min B) = \min A$, όπου το πρώτο minimum λαμβάνεται μέσα στον U ενώ το δεύτερο μέσα στον $U + V$. Για ευκολία συμβολίζουμε με $\trianglelefteq$ τη διάταξη στον $U + V$ και με $\triangleleft$ το αυστηρό της μέρος.

Επειδή $\min B \in B$ έχουμε $(0, \min B) \in A$. Έστω $(i,x) \in A$, αν $i = 0$ τότε $x \in B$, οπότε $\min B \leq x$ και $(0, \min B) \trianglelefteq (0,x) = (i,x)$. Αν $i = 1$ (και άρα $x \in V$) τότε $(0, \min B) \triangleleft (1,x) = (i,x)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $(0, \min B) \trianglelefteq (i,x)$ για κάθε $(i,x) \in A$. Καταλήγουμε ότι $(0, \min B) = \min A$.

2η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) = \varnothing$. Τότε $A \subseteq \{1\} \times V$ και επομένως για να βρούμε το ελάχιστο του A θα πρέπει να κοιτάξουμε μέσα στον V. Θεωρούμε το σύνολο

$$C = \{y \in V \mid (1,y) \in A\}.$$

Αφού $\varnothing \neq A \subseteq \{1\} \times V$ έχουμε $C \neq \varnothing$. Επομένως υπάρχει το $\min C \in V$. Δείχνουμε ότι $(1, \min C) = \min A$. Επειδή $\min C \in C$ έχουμε $(1, \min C) \in A$. Έστω $(i,x) \in A$. Αν $i = 0$ τότε $x \in U$ οπότε $A \cap (\{0\} \times U) \neq \varnothing$, που είναι άτοπο γιατί είμαστε στη 2η Περίπτωση. Άρα $i = 1$ και $x \in V$. Αφού $(1,x) = (i,x) \in A$ έχουμε $x \in C$ και άρα $\min C \leq x$. Επομένως $(1, \min C) \leq (1,x)$. Καταλήγουμε ότι $(1, \min C) \leq (i,x)$ για κάθε $(i,x) \in A$ και άρα $(1, \min C) = \min A$.

(v) Ο χώρος $\{0\} + \mathbb{N} = (\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{N}) = \{(0,0)\} \cup (\{1\} \times \mathbb{N})$ είναι όμοιος με τον $\mathbb{N}$. Στην ουσία προσθέτουμε ένα στοιχείο στα αριστερά του $\mathbb{N}$, τότε ο καινούργιος χώρος έχει τη μορφή:

$$\underset{(0,0)}{\square} \qquad \underbrace{\blacksquare \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \qquad \cdots}_{\{1\} \times \mathbb{N}}$$

Την ίδια μορφή έχει και ο $\mathbb{N}$. Αυστηρά ορίζουμε την απεικόνιση $\pi : \{(0,0)\} \cup (\{1\} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} : \pi(0,0) = 0_{\mathbb{N}}$ και $\pi(1,n) = n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Τότε η π είναι η ζητούμενη ομοιότητα.

Από την άλλη ο χώρος $\mathbb{N} + \{0\} = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1\} \times \{0\}) = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup \{(1,0)\}$ έχει το $(1,0)$ ως οριακό σημείο:

$$\underbrace{\blacksquare \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \qquad \cdots}_{\{0\} \times \mathbb{N}} \qquad \underset{(1,0)}{\square}$$

Αυστηρά: αν $(i,n) < (1,0)$ τότε $i = 0$ και επομένως $(0,n) < (0, n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}) < (1,0)$, άρα το $(1,0)$ δεν μπορεί να είναι ο επόμενος του (i,n).

Ο δύο χώροι $\mathbb{N} + \{0\}$ και $\{0\} + \mathbb{N}$ δεν είναι όμοιοι γιατί αλλιώς θα είχαμε

$$\mathbb{N} + \{0\} =_o \{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N} =_o \{0\} \times \mathbb{N},$$

δηλαδή ο $\mathbb{N} + \{0\}$ θα ήταν όμοιος με το γνήσιο αρχικό τμήμα του $seg((1,0)) = \{0\} \times \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί ένας καλά διατεταγμένος χώρος δεν μπορεί να είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του (γνωστό Θεώρημα).