Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση:

Θεώρημα Αναδρομής. Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E ένα σύνολο, $a \in E$ και μια συνάρτηση $h : E \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(Sn) &= h(f(n)) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους (Πόρισμα 5.12). Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E, Y σύνολα και συναρτήσεις $g : Y \to E$, $h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), n, y) \quad n \in \mathbb{N},\ y \in Y. \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής στο σύνολο $E = \mathcal{P}(X)$ με $a = \{x_0\}$ και $h : E \to E : A \mapsto g[A]$. Από το Θεώρημα Αναδρομής υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με $f(0) = a = \{x_0\}$ και $f(Sn) = h(f(n)) = g[f(n)]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε παίρνουμε $A_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Θεωρούμε την πιο πάνω ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και παίρνουμε $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Προφανώς $x_0 \in A_0 \subseteq B$, άρα $x_0 \in B$. Αν $x \in B$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in A_n$ και άρα $g(x) \in g[A_n] = A_{Sn} \subseteq B$, επομένως $g(x) \in B$.

Τέλος δείχνουμε ότι το B είναι αριθμήσιμο. Από γνωστό θεώρημα (αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι αριθμήσιμο. Για την ακρίβεια δείχνουμε ότι κάθε A_n είναι μονοσύνολο.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για $n = 0$ έχουμε $A_0 = \{x_0\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι μονοσύνολο, $A_n = \{a\}$. Τότε $A_{Sn} = g[A_n] = g[\{a\}] = \{g(a)\}$ και επομένως το A_{Sn} είναι μονοσύνολο.

Σχόλιο: Το σύνολο B που κατασκευάζεται με τον πιο πάνω τρόπο αποτελείται από τα στοιχεία $x_0, g(x_0), g(g(x_0)), \ldots$, και συνήθως αποκαλείται η **τροχιά** του x_0 ως προς τη συνάρτηση g.

Άσκηση 2. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους).

Λύση.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to E$ και $g : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος Αναδρομής και δείχνουμε με επαγωγή ότι $f(n) = g(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $f(0) = a = g(0)$. Υποθέτουμε ότι $f(n) = g(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$f(Sn) = h(f(n)) = h(g(n)) = g(Sn)$$

και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι 1-1.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Λύση.

(i) Θεωρούμε το σύνολο X της υπόδειξης. Έχουμε $0_2 = \pi(0_1)$ επομένως $0_2 \in X$. Έστω $m \in X$, θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}_1$ με $m = \pi(n)$. Τότε $S_2 m = S_2 \pi(n) = \pi(S_1 n)$ επομένως $S_2 m = \pi(n')$ για κάποιο $n' \in \mathbb{N}_1$ και άρα $S_2 m \in X$.

Από την Αρχή Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ έχουμε $X = \mathbb{N}_2$ και άρα η π είναι επί.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο Y της υπόδειξης. Δείχνουμε αρχικά ότι $0_1 \in Y$. Έστω $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(0_1) = \pi(m)$. Έπεται ότι $\pi(m) = 0_2$. Αν είχαμε $m \neq 0_1$ τότε από γνωστό Λήμμα $m = S_1 k$ για κάποιο $k \in N_1$. Αλλά τότε

$$0_2 = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k)$$

και τότε το 0_2 θα ανήκε στην εικόνα της S_2 που είναι άτοπο. Άρα $m = 0_1$ και έχουμε επομένως $0_1 \in Y$.

Θεωρούμε τώρα $n \in Y$ και (για να δείξουμε ότι $S_1 n \in Y$) θεωρούμε επίσης $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(S_1 n) = \pi(m)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $m = S_1 n$. Έχουμε

$$\pi(m) = \pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \neq 0_2.$$

Αφού $\pi(0_1) = 0_2$ προκύπτει ότι $m \neq 0_1$ και τότε από γνωστό Λήμμα υπάρχει $k \in \mathbb{N}_1$ με $m = S_1 k$. Συνεπώς

$$S_2 \pi(n) = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k).$$

Επειδή η συνάρτηση S_2 είναι 1-1 προκύπτει $\pi(n) = \pi(k)$ και αφού $n \in Y$ έχουμε $n = k$. Επομένως $m = S_1 k = S_1 n$ και $S_1 n \in Y$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια 1-1 και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.

Ορίζουμε $0_2 = \pi(0_1) \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$, $m \in \mathbb{N}_2$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "S_1"'] & \mathbb{N}_2 \arrow[l, bend right, "\pi^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "S_2"] \\ \mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{N}_2 \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι η S_2 είναι καλά ορισμένη αφού η π είναι 1-1 και επί. Η S_2 είναι 1-1 ως σύνθεση 1-1 συναρτήσεων.

Αν είχαμε $S_2 m = 0_2$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_2$ τότε θα είχαμε

$$\pi(0_1) = 0_2 = S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$$

και αφού η π είναι 1-1 προκύπτει $0_1 = S_1 \pi^{-1}(m)$. Επομένως το 0_1 θα ανήκε στην εικόνα της S_1 που είναι άτοπο. Άρα $S_2 m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$.

Τέλος δείχνουμε την Αρχή της Επαγωγής στο $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Έστω $Y \subseteq \mathbb{N}_2$ με $0_2 \in Y$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$ αν $m \in Y$ τότε $S_2 m \in Y$. Θεωρούμε το σύνολο $X = \pi^{-1}[Y]$. Αφού $\pi(0_1) = 0_2 \in Y$ έχουμε $0_1 \in X$.

Έστω $n \in X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_1$. Τότε $\pi(n) \in Y$ και από την υπόθεσή μας για το Y έχουμε ότι $S_2 \pi(n) \in Y$. Αλλά $S_2 \pi(n) = \pi(S_1 \pi^{-1}(\pi(n))) = \pi(S_1 n)$. Άρα $\pi(S_1 n) \in Y$ που σημαίνει ότι $S_1 n \in X$. Με άλλα λόγια δείξαμε για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$,

$$n \in X \implies S_1 n \in X.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ έχουμε $\pi^{-1}[Y] = X = \mathbb{N}_1$. Εφόσον η π είναι επί προκύπτει ότι $Y = \mathbb{N}_2$ και επομένως η Αρχή της Επαγωγής ισχύει για την τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 5. Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους) με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναδρομής με παραμέτρους.

Λύση.

Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο E, ένα στοιχείο $a \in E$ και $h : E \to E$. Δείχνουμε ότι υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{\varnothing\}$ και τις συναρτήσεις $g : Y \to E : g(\varnothing) = a$,

$$H : E \times \mathbb{N} \times Y \to E : H(x, n, y) = h(x).$$

Από το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $F : \mathbb{N} \times Y \to E$ με

$$\begin{aligned} F(0, y) &= g(y) \\ F(Sn, y) &= H(F(n, y), n, y), \quad n \in \mathbb{N},\ y \in Y. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to E : f(n) = F(n, \varnothing)$. Τότε

$$f(0) = F(n, \varnothing) = g(\varnothing) = a$$

και

$$f(Sn) = F(Sn, \varnothing) = H(F(n, \varnothing), n, \varnothing) = h(F(n, \varnothing)) = h(f(n))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η μοναδικότητα της f μπορεί φυσικά να αποδειχθεί με επαγωγή αλλά μπορούμε επίσης να τη δείξουμε χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της F: αν $f' : \mathbb{N} \to E$ ικανοποιεί $f'(0) = a$ και $f'(Sn) = h(f'(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $F' : \mathbb{N} \times Y \to E$ με $F'(n, y) = f'(n)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} F'(0, y) &= f'(0) = a = g(\varnothing) = g(y) \\ F'(Sn, y) &= f'(Sn) = h(f'(n)) = H(f'(n), n, y), \end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $y \in Y = \{\varnothing\}$. Από τη μοναδικότητα της F έχουμε $F(n, y) = F'(n, y)$ και επομένως $f(n) = f'(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.