Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση συμβολισμών:

- Με $\mathcal{P}(A)$ εννοούμε το δυναμοσύνολο του A, δηλαδή $\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$.
- Με Δ εννοούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\{0, 1\}$.
- Με $\mathcal{C}$ εννούμε το σύνολο του Cantor, που είναι υποσύνολο του $[0, 1]$.
- Με $(A \to B)$ ή B^A εννοούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B.
- Αν $A \subseteq X$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ όπου $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$.

Κάποιες βασικές σχέσεις ισοπληθικότητας:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q} \\
&\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\
&\mathbb{N} <_c \Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{C} =_c \mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\
&\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) <_c \dots
\end{aligned}$$

Σχόλια:

- Το $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ προκύπτει από προηγούμενη άσκηση επειδή $\mathbb{N} =_c \mathbb{Q}$.
- Το $\Delta =_c \mathcal{C} \leq_c \mathbb{R}$ αποδείχθηκε στο μάθημα.
- Το $\Delta =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$ προκύπτει απο τις ασκήσεις αυτού του φυλλαδίου.
- Τα $\mathbb{N} <_c \Delta$ και $\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \dots$ αποδείχθηκαν στο μάθημα.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι για κάθε σύνολα A, B τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $A \leq_c B$ και $A \neq_c B$

(ii) $A \leq_c B$ και $B \not\leq_c A$.

Σημείωση: Γράφουμε $A <_c B$ ακριβώς όταν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Schröder-Bernstein.

Λύση.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Αν είχαμε $A =_c B$ τότε θα είχαμε και $B \leq_c A$ που αντιβαίνει στην υπόθεση (ii). Επομένως $B \neq_c A$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $B \leq_c A$. Εφόσον έχουμε και ότι $A \leq_c B$, από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύτει $A =_c B$ που αντιβαίνει στην υπόθεση (i). Επομένως $B \not\leq_c A$.

Άσκηση 2. Αν έχουμε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A \rightarrowtail B$ δείξτε ότι υπάρχει επιμορφισμός $\pi : B \twoheadrightarrow A$ με την ιδιότητα $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Λύση.
Θεωρούμε ένα $a_0 \in A$ και ορίζουμε $\pi : B \to A$ ως εξής:

$$\pi(y) = \begin{cases} \tau^{-1}(y), & \text{αν } y \in \tau[A] \\ a_0, & y \notin \tau[A]. \end{cases}$$

Αν $x \in A$ τότε $\pi(\tau(x)) = \tau^{-1}(\tau(x)) = x$. Παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση π είναι αναγκαστικά επί γιατί το τυχαίο $x \in A$ είναι της μορφής $\pi(y)$ για $y = \tau(x) \in B$.

Άσκηση 3 (Προβλήματα x2.1 και x2.2)**.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Να ορίσετε μία 1-1 και επί συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (a,b)$.

(ii) Να ορίσετε μια 1-1 και επί συνάρτηση $g : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a,b) =_c (a,b] =_c \mathbb{R}$.

Λύση.
(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = a+(b-a)\cdot x$, όπου $x \in (0,1)$. Προφανώς η f είναι 1-1. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $f(x) \in (a,b)$ για κάθε $x \in (0,1)$ και πως για κάθε $y \in (a,b)$ υπάρχει $x \in (0,1)$, συγκεκριμένα το $x = (y-a)/(b-a)$, με $f(x) = y$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί. Από το (i) η συνάρτηση

$$x \in (0,1) \mapsto -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι 1-1 και επί. Επομένως μπορούμε να πάρουμε τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x\right)$$

που είναι φυσικά 1-1 και επί.

(iii) Προφανώς $(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R}$. Από τα (i) και (ii) έχουμε $\mathbb{R} =_c (0,1) =_c (a,b)$, επομένως

$$(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R} =_c (a,b)$$

και με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο: Με λίγη δουλειά μπορεί κανείς να ορίσει κατευθείαν (δηλαδή χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein) αντιστοιχίες μεταξύ των ζητούμενων συνόλων.

Άσκηση 4 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι 1-1 και επί. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Λύση.
Δείχνουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1. Υποθέτουμε ότι $f(A) = f(B)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \in A &\iff \chi_A(n) = 1 \\ &\iff f(A)(n) = 1 \\ &\iff f(B)(n) = 1 \\ &\iff \chi_B(n) = 1 \\ &\iff n \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η f είναι 1-1. Δείχνουμε τώρα ότι είναι και επί. Αν $\alpha \in \Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1 \,\} \subseteq \mathbb{N}$$

και δείχνουμε ότι $f(A) = \alpha$. Έχουμε

$$f(A)(n) = 1 \iff \chi_A(n) = 1 \iff n \in A \iff \alpha(n) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή οι ακολουθίες $f(A)$ και α παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 προκύπτει από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι $f(A) = \alpha$.

Τέλος έχουμε
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c \mathcal{C} \leq_c \mathbb{R}.$$

Άσκηση 5 (Λήμμα 2.25)**.** Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Υπόδειξη: Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

Λύση.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ με
$$\pi(x) = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q < x \,\}.$$
Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών έχουμε ότι για κάθε $x < y$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $x < q < y$. Ειδικότερα $q \in \pi(y)$ και $q \notin \pi(x)$. Επομένως $\pi(x) \neq \pi(y)$ για κάθε $x < y$ και άρα η συνάρτηση π είναι 1-1.

Αφού $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$ έχουμε από προγούμενη άσκηση ότι $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Συνεπώς
$$\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R},$$
όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 4. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Άσκηση 6 (Άσκηση 2.23 plus)**.** Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι
$$(A_1 \to B_1) \leq_c (A_2 \to B_2)$$
Με χρήση του άλλου συμβολισμού το παραπάνω γράφεται ως εξής:
$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$
Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

Αν $A_1 =_c A_2$ και αν $B_1 =_c B_2$ δείξτε ότι $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$ ή αλλιώς $B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και με εφαρμογή της Άσκησης 2 μια συνάρτηση $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Λύση.
Σύμφωνα με την υπόδειξη θεωρούμε συναρτήσεις $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$. Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $\rho : B_1 \rightarrowtail B_2$.

Θέλουμε να ορίσουμε μια 1-1 συνάρτηση H που να αντιστοιχεί μια τυχαία συναρτήση $f \in (A_1 \to B_1)$ σε μια συναρτήση $H(f) = g \in (A_2 \to B_2)$. Δοσμένης $f \in (A_1 \to B_1)$ ορίζουμε
$$H(f) : A_2 \to B_2 : H(f)(a_2) = (\rho \circ f \circ \pi)(a_2).$$
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[l, bend right, "\pi"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\ B_1 \arrow[r, "\rho"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $H : (A_1 \to B_1) \to (A_2 \to B_2) : f \mapsto H(f)$ είναι 1-1. Θεωρούμε $f, f' \in (A_1 \to B_1)$ με $H(f) = H(f')$ και δείχνουμε ότι $f = f'$.

Έστω $a_1 \in A_1$, πρέπει να δείξουμε ότι $f(a_1) = f'(a_1)$. Παίρνουμε το $a_2 = \tau(a_1) \in A_2$. Εφόσον οι συναρτήσεις $H(f)$ και $H(f')$ είναι ίσες, θα παίρνουν και την ίδια τιμή στο a_2. Επομένως
$$H(f)(a_2) = H(f')(a_2)$$
ισοδύναμα
$$(\rho \circ f \circ \pi)(a_2) = (\rho \circ f' \circ \pi)(a_2).$$
Παρατηρούμε ότι $\pi(a_2) = \pi(\tau(a_1)) = a_1$ από την ιδιότητα της π, επομένως η πιο πάνω ισότητα γίνεται
$$(\rho \circ f)(a_1) = (\rho \circ f')(a_1) \quad \text{δηλαδή} \quad \rho(f(a_1)) = \rho(f'(a_1)).$$
Εφόσον η ρ είναι 1-1 προκύπτει $f(a_1) = f'(a_1)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Το συμπέρασμα της Άσκησης 2.23 του βιβλίου προκύπτει από αυτό μου μόλις αποδείξαμε και με τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein.

Μπορεί κανείς να λύσει την Άσκηση 2.23 και κατευθείαν. Η μέθοδος είναι ίδια με πιο πάνω και μάλιστα κάπως πιο απλή: αν έχουμε $\tau : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow A_2$ και $\rho : B_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B_2$ τότε μπορούμε να πάρουμε $\pi = \tau^{-1}$, δεν χρειάζεται δηλαδή να επικαλεστούμε την Άσκηση 2. Η συνάρτηση H όπως πιο πάνω είναι τότε 1-1 και (μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι είναι και) επί.

Άσκηση 7 (Πρόβλημα x2.7)**.** Δείξτε ότι

$$(A \times B \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A\times B} =_c (C^B)^A.$$

Λύση.

Θέλουμε να ορίσουμε μια αντιστοιχία π από το σύνολο $(A \times B \to C)$ στο σύνολο $(A \to (B \to C))$. Για κάθε $p \in (A \times B \to C)$ το $\pi(p)$ είναι μια συνάρτηση από το A στο σύνολο $(B \to C)$ έτσι ώστε για κάθε $a \in A$:

$$\pi(p)(a) : B \to C : \pi(p)(a)(b) = p(a, b).$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \pi(p)$ είναι 1-1 και επί.

Έστω $\pi(p) = \pi(p')$, πρέπει να δείξουμε ότι $p = p'$. Θεωρούμε $(a, b) \in A \times B$. Τότε $\pi(p)(a)(b) = \pi(p')(a)(b)$ δηλαδή $p(a, b) = p'(a, b)$. Επομένως $p = p'$ και η π είναι 1-1.

Για το "επί" θεωρούμε $h \in (A \to (B \to C))$ και ορίζουμε $p : A \times B \to C$ με $p(a, b) = h(a)(b)$, δηλαδή το $p(a, b)$ είναι η τιμή της συνάρτησης $h(a) : B \to C$ στο b. Δείχνουμε ότι $\pi(p) = h$. Έστω $a \in A$, πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\pi(p)(a)$ και $h(a)$ από το B στο C είναι ίσες. Για κάθε $b \in B$ έχουμε

$$\pi(p)(a)(b) = p(a, b) = h(a)(b)$$

επομένως $\pi(p)(a) = h(a)$.

Άσκηση 8 (Προβλήματα x2.5 και x2.6)**.** Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Υπόδειξη: Οι δύο πρώτες ανισότητες κατά Cantor προκύπτουν εύκολα με χρήση των γνωστών και της Άσκησης 6. Για την τελευταία εφαρμόστε την Άσκηση 7.

Λύση.

Από την Άσκηση 6 εφόσον $\{0, 1\} \leq_c \mathbb{N} \leq_c \mathbb{R}$ έχουμε $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Όπως δείξαμε πιο πάνω $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \Delta$ (Άσκηση 4) και επομένως

(1) $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Επειδή $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 5), έχουμε

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη και τρίτη ισότητα κατά Cantor χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 7 και το γεγονός ότι το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο (αυτό μόνο στην τρίτη ισότητα). Άρα $\mathbb{R}^N \leq_c \mathbb{R}$ και από την (1) προκύπτει

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Τέλος, αφού $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτουν οι ισότητες κατά Cantor.