Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan)**.**
Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3)**.** Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$
$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι 1-1 δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus)**.** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$
$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$
$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Άσκηση 4. Δίνεται ένα άπειρο σύνολο A και μία συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ επί.
Δείξτε ότι για κάθε $a_0, \dots, a_n \in A$ υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

Άσκηση 5. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{\, Y \mid Y \subseteq X \,\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.