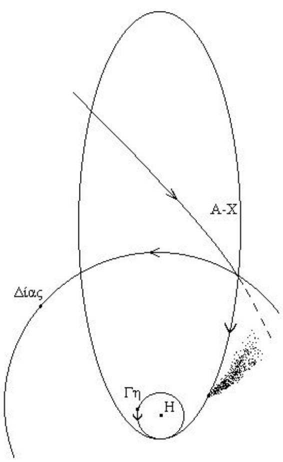
Δ. Ορμή και Στροφορμή



Δ.1 Ένας κομήτης είχε αρχικά μια τροχιά της οποίας το περιήλιο απείχε από τον Ήλιο περισσότερες από 3 AU (1 AU = 1 αστρονομική μονάδα = $1{,}5 \times 10^8$ km, η μέση απόσταση Γης-Ηλίου). Οι κομήτες που δεν πλησιάζουν σε μικρότερη απόσταση από περίπου 3 AU από τον Ήλιο, δεν αποκτούν “κόμη” και δεν παρατηρούνται. Σε μια από τις περιφορές του, ο κομήτης πέρασε κοντά στον πλανήτη Δία, με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η κατεύθυνση κίνησής του, και η στροφορμή του ως προς το κέντρο του Ηλίου. Μετά από αυτό, η νέα τροχιά του κομήτη τον φέρνει σε αρκετά μικρές αποστάσεις από τον Ήλιο, ώστε να αποκτά ουρά και να γίνεται ορατός. Η διεργασία αυτή είναι γνωστή ως *άγρα κομητών* (άγρα = ψάρεμα, κυνήγι), στην οποία επιδίδονται οι μεγάλοι πλανήτες, και κυρίως ο Δίας.

Αμέσως μετά τη συνάντησή του με τον Δία, ο κομήτης απείχε απόσταση 5 AU από την Ήλιο, και είχε ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{15}$ AU/y (y = έτος). Την ίδια στιγμή, η ταχύτητα του κομήτη είχε, ως προς τον Ήλιο, ακτινική συνιστώσα ίση με $\upsilon_r = -\frac{2}{5}\sqrt{74}$ AU/y , και εγκάρσια συνιστώσα $\upsilon_\theta = \frac{1}{5}\sqrt{79}$ AU/y .

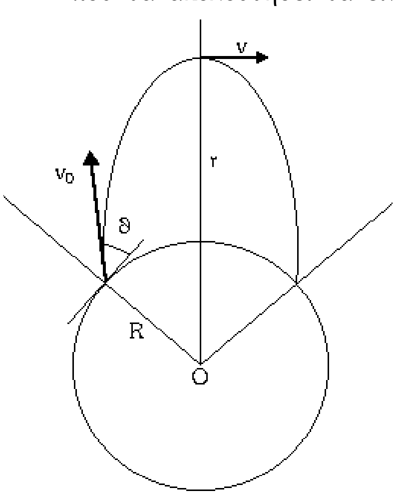
Χρησιμοποιώντας μονάδες AU για το μήκος και y για το χρόνο, στις οποίες είναι $GM = 40\ \mathrm{AU}^3/\mathrm{y}^2$, και τη μάζα του κομήτη *m*, όπου αυτή χρειάζεται,

(α) Βρείτε τη στροφορμή L του κομήτη ως προς τον Ήλιο, και την ολική του ενέργεια E .

(β) Βρείτε την ελάχιστη, r_1, και τη μέγιστη απόσταση, r_2, του κομήτη από τον Ήλιο. (γ) Βρείτε τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ελλειπτικής τροχιάς του κομήτη: (i) τον μεγάλο ημιάξονά της $\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. (ii) την εκκεντρότητά της $\varepsilon = \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$. (iii) τον μικρό ημιάξονά της $b = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{r_1 r_2}$.

(δ) Το εμβαδόν της έλλειψης είναι $S = \pi a b$. Από το γεγονός ότι ο ρυθμός σάρωσης επιφάνειας από την επιβατική ακτίνα που συνδέει τον κομήτη με τον Ήλιο είναι σταθερός και ίσος με $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2m}$, βρείτε την περίοδο περιφοράς *T* του κομήτη γύρω από τον Ήλιο.

Δ.2 Θεωρήστε ένα βλήμα μάζας *m*, που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα υ_0, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Αν το βλήμα θα επιστρέψει στη Γη, η τροχιά που θα ακολουθήσει θα είναι τμήμα έλλειψης, διαφορετικά θα είναι παραβολική ή υπερβολική. Η Γη θεωρείται ακίνητη, έχει μάζα *M*, είναι τελείως σφαιρική με ακτίνα *R*, και η αντίσταση της ατμόσφαιρας είναι αμελητέα.



(α) Βρείτε το μέτρο της στροφορμής *L* του βλήματος ως προς το κέντρο της Γης. Μεταβάλλεται με το χρόνο;

(β) Αν, όταν το βλήμα φθάσει στη μέγιστη απόστασή του *r* από το κέντρο της Γης, έχει ταχύτητα υ, να δειχθεί ότι η σχέση που συνδέει την *r* με τα δεδομένα του προβλήματος είναι η

$$\left(1-\alpha^2\right)z^2 - z + \alpha^2\cos^2\theta = 0\,,$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι αδιάστατες παράμετροι ύψους $z = r/R$ και ταχύτητας $\alpha = \upsilon_0/\upsilon_\delta$, με $\upsilon_\delta = \sqrt{2GM/R}$.

(γ) (i) Αν $\theta = 45^o$, να βρεθεί η τιμή του α για την οποία το βλήμα θα φθάσει σε μέγιστη απόσταση $r = 2R$ από το κέντρο της Γης. (ii) Δείξετε ότι, ανεξαρτήτως της γωνίας θ, το βλήμα θα διαφύγει από τη Γη αν η αρχική του ταχύτητα είναι μεγαλύτερη της υ_δ .

Δ.3 Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα υ_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη Γη. Η Γη θεωρείται τελείως σφαιρική και έχει μάζα M. Ένα σώμα μάζας m, κινούμενο ακτινικά με ταχύτητα υ_0, συγκρούεται με τον δορυφόρο και ενσωματώνεται σε αυτόν δημιουργώντας ένα σώμα μάζας $2m$.

(α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή και βρείτε την τιμή της. (β) Βρείτε την ολική ενέργεια $E_{ολ}$ που θα έχει το σώμα που σχηματίζεται μετά τη σύγκρουση. (γ) Αν η $E_{ολ}$ είναι αρνητική, το σώμα θα κινηθεί σε κλειστή τροχιά, που είναι κύκλος ή έλλειψη. Δείξετε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του σώματος θα είναι ελλειπτική. (δ) Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής, βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σώματος από τη Γη, r_1, και τη μέγιστη, r_2, καθώς αυτό κινείται στην ελλειπτική του τροχιά. Εκφράστε τα αποτελέσματα συναρτήσει του r_0.

Δ.4 Δύο πίθηκοι *Α* και *Β* είναι κρεμασμένοι από τα δύο άκρα ενός σχοινιού, που περνάει από μία τροχαλία ακτίνας *R*. Οι πίθηκοι βρίσκονται στην ίδια απόσταση *l* από την τροχαλία. Οι μάζες του σχοινιού και της τροχαλίας είναι αμελητέες. Οι πίθηκοι έχουν την ίδια μάζα, είναι αρχικά ακίνητοι και αρχίζουν ταυτόχρονα να αναρριχώνται με ταχύτητες υ και 3υ, αντίστοιχα, ως προς το σκοινί.

Εξετάζοντας την ολική στροφορμή των δύο πιθήκων ως προς το κέντρο της τροχαλίας, βρείτε τις ταχύτητές τους ως προς αυτήν. Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ο καθένας γιά να φτάσει στην τροχαλία.

Δ.5 Δορυφόρος μάζας *m* κινείται υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης της Γης, σε ελλειπτική τροχιά γύρω από αυτήν.

(α) Να αποδείξετε ότι η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ του δορυφόρου ως προς το κέντρο της Γης διατηρείται σταθερή.

(β) Να εκφραστεί η ακτινική συνιστώσα, υ_r, της ταχύτητας του δορυφόρου, συναρτήσει της απόστασής του r από το κέντρο της Γης, της ολικής του ενέργειας, E, της στροφορμής του, L, ως προς το κέντρο της Γης, της *m*, και της μάζας M της Γης. Να βρεθεί η απόσταση r_m στην οποία το μέτρο της υ_r είναι μέγιστο.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ολική ενέργεια του δορυφόρου είναι: $E = -\dfrac{GMm}{r_1 + r_2}$, όπου r_1 και r_2 είναι η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση του δορυφόρου από τη Γη, αντίστοιχα.

Δ.6 Ένας πλανήτης είναι σφαιρικός, έχει μάζα *M* και ακτίνα *R*, δεν περιστρέφεται και δεν έχει ατμόσφαιρα. Από ένα σημείο του πλανήτη εκτοξεύεται ένα βλήμα, με αρχική ταχύτητα υ_0 σε οριζόντια διεύθυνση. Το βλήμα φθάνει σε μέγιστη απόσταση R_1 από το κέντρο του πλανήτη, όπου και έχει ταχύτητα υ_1. Δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\upsilon_0 = \dfrac{\upsilon_\delta}{\sqrt{1 + R/R_1}}$, όπου $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$. Επίσης δείξετε ότι, για να φθάσει το βλήμα σε άπειρη απόσταση από τον πλανήτη (διαφυγή), θα πρέπει να είναι $\upsilon_0 = \upsilon_\delta$.

Δ.7 Ένα διαστημόπλοιο μάζας *m*, κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από έναν πλανήτη μάζας *M*. Χρησιμοποιώντας τους πυραύλους του, το διαστημόπλοιο μειώνει σε αμελητέο χρόνο το μέτρο της ταχύτητάς του στο μισό, χωρίς να αλλάξει η κατεύθυνσή της.

(α) Δείξετε ότι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου αμέσως μετά την επιβράδυνση είναι $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{MG}{r_0}}$.

(β) Ακολούθως, το διαστημόπλοιο κινείται σε ελλειπτική τροχιά με τον πλανήτη στη μια εστία της έλλειψης. Χρησιμοποιήστε τους νόμους διατήρησης για να βρείτε ποια θα είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση του διαστημοπλοίου από τον πλανήτη, συναρτήσει του r_0. (Η δυναμική ενέργεια του διαστημοπλοίου δίνεται από τη σχέση $U(r) = -GMm/r$, όπου *r* είναι η απόστασή του από τον πλανήτη.)