Β. Δυναμική

Β.1 Ευθύγραμμη ράβδος έχει μήκος L και γραμμική πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα μήκους) που μεταβάλλεται συναρτήσει της απόστασης x από το ένα άκρο της ράβδου σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = \lambda_0(1 + x/L)$ όπου λ_0 μια θετική σταθερά. Δείξετε ότι η ολική μάζα της ράβδου είναι $m = \frac{3}{2}\lambda_0 L$.

Β.2 Η δύναμη $\vec{\boldsymbol{F}} = (t-2)\hat{\boldsymbol{x}} + t^2\hat{\boldsymbol{y}} - 2t\hat{\boldsymbol{z}}$ (σε μονάδες S.I., t είναι ο χρόνος), ασκείται πάνω σε σημειακή μάζα, της οποίας η ταχύτητα είναι $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = t\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$. Βρείτε:

(α) Τη στιγμιαία παρεχόμενη από τη δύναμη ισχύ, ως συνάρτηση του χρόνου, $P(t)$. Απ.: $P(t) = 4t^2 - 4t$

(β) Το ολικό έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη μεταξύ $t = 0$ και t, $W(t)$. Απ.: $W(t) = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2$

Β.3 Ένα σώμα μάζας $m = 1\,\text{kg}$ κινείται πάνω στον άξονα των x υπό την επίδραση της δύναμης $F_x(t) = 6t$ (σε μονάδες S.I.) στην κατεύθυνση του άξονα, όπου t ο χρόνος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x(0) = 0$ και κινείται με ταχύτητα $\upsilon_x(0) = -1\,\text{m/s}$. Να βρεθούν η ταχύτητα $\upsilon_x(t)$ και η θέση $x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Απ.: $\upsilon_x(t) = 3t^2 - 1, \quad x(t) = t^3 - t$

Β.4 Η εξίσωση κίνησης ενός σώματος δίνεται από τη διαφορική εξίσωση: $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{2\tau\upsilon}{t^2 - \tau^2}$ (τ θετική σταθ.)

(α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος, $\upsilon(t)$, αν αρχικά ($t = 0$) είναι $\upsilon(0) = \upsilon_0$. Απ.: $\upsilon(t) = \upsilon_0 \dfrac{\tau - t}{\tau + t}$

(β) Βρείτε τη θέση του σώματος, $x(t)$, αν αρχικά είναι $x(0) = 0$. Απ.: $x(t) = \upsilon_0 \left[2\tau \ln\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right) - t \right]$

Β.5 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y = 0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{\mathbf{\upsilon}}$, όπου $\vec{\mathbf{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, υ, ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\upsilon = -\dfrac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα τείνει σε μια οριακή τιμή και βρείτε την τιμή αυτή. Απ.: $\upsilon_{o\rho} = -\dfrac{mg}{b}$

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $y = -\dfrac{m^2 g}{b^2}\left[\dfrac{b}{m}t - \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]$

(δ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t. Δίνεται το ανάπτυγμα: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$.

Απ.: $y \approx -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}g\dfrac{b}{m}t^3, \quad \upsilon \approx -gt + \frac{1}{2}g\dfrac{b}{m}t^2$

Β.6 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\vec{\mathbf{\upsilon}}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\upsilon_x = \upsilon_0/\sqrt{2}, \quad \upsilon_y = (\upsilon_0/\sqrt{2})e^{-kt}$

(γ) Ποια είναι η εξίσωση $y(x)$ της τροχιάς του σωματιδίου; Απ.: $y = \dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,k}{\upsilon_0}x\right)\right]$

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά; Απ.: $y_m = \dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}$

Β.7 Σε εορταστική εκδήλωση μιας αερολέσχης, ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει με μηδενική αρχική ταχύτητα από ύψος 3000 m. Με το αλεξίπτωτο κλειστό, κάποια στιγμή αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1 = 40 \text{ m/s}$.

(α) Στο διάστημα αυτό, η αντίσταση που ασκεί ο αέρας πάνω στον αλεξιπτωτιστή είναι ανάλογη της ταχύτητάς του με σταθερά αναλογίας $b = 1{,}5 \text{ kg/s}$, η δε μάζα του αλεξιπτωτιστή με τη στολή του είναι 66 kg. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του αλεξιπτωτιστή. Πάρτε τον κατακόρυφο άξονα ως άξονα y, με θετικές τιμές προς τα κάτω, και την αρχική θέση του αλεξιπτωτιστή ως $y = 0$. Λύστε την εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου.

(β) Πόση είναι η ορική ταχύτητα υ_{op} του αλεξιπτωτιστή;

(γ) Πόση απόσταση κάλυψε για να φθάσει την ταχύτητα $\upsilon_1 = 40 \text{ m/s}$;

(δ) Είναι συμβιβαστά τα δεδομένα; Εξηγήστε γιατί. (Θεωρήστε $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Β.8 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στο σημείο $y = 0$, και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα κάτω). Κατά την κίνηση του σώματος στο πεδίο βαρύτητας, το οποίο θεωρούμε ομογενές, η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος, και ίση με $-a\upsilon^2$, όπου υ η ταχύτητα του σώματος και a μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, $\upsilon(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Δείξετε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια ορική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, $y(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.

Β.9 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ $(V > 0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y = 0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\mathbf{\upsilon}}$, όπου $\vec{\mathbf{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}$, δείξετε ότι $y = \dfrac{V-\upsilon}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(\dfrac{1+kV/g}{1+k\upsilon/g}\right)$.

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Απ.: $H = \dfrac{V}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right)$

(δ) Αν $\upsilon = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y = 0$, δείξτε ότι:

$$\left(1-\frac{kU}{g}\right)e^{kU/g} = \left(1+\frac{kV}{g}\right)e^{-kV/g}.$$

Β.10 Φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{x}}$, με αρχική ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}(0) = \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0 = \upsilon_0\hat{\boldsymbol{z}}$ στη θέση $\vec{\boldsymbol{r}}(0) = 0$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου παραμένει σταθερή.

(β) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και να λυθεί.

(γ) Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της κίνησης και να βρεθεί και να σχεδιαστεί η τροχιά του.

Β.11 Σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινηθεί πάνω στον άξονα των x, υπό την επίδραση της δύναμης $F_x = -\dfrac{k}{x^2}$, όπου x είναι η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή Ο και k μια θετική σταθερά. Το σωματίδιο κρατιέται σε κάποια θέση $x(0) = a > 0$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο, οπότε κάτω από την επίδραση της ελκτικής δύναμης κινείται προς το κέντρο Ο.

(α) Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$ για να βρείτε τη συνάρτηση $\upsilon(x)$.

(β) Δείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει το σωματίδιο από το σημείο εκκίνησης στο σημείο Ο είναι ίσος με $\pi\sqrt{ma^3/8k}$. Δίνεται: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\,dx = -\sqrt{x(a-x)} + a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$.