Ε. Στερεο Σώμα

Ε.1 Μια λεπτή μη ομογενής ράβδος μήκους L μπορεί να ταλαντώνεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο ένα της άκρο Ο. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα (πυκνότητα ανά μονάδα μήκους) $\lambda(x) = a(1 + x / L)$, όπου a σταθερά και x η απόσταση από το άκρο Ο.

(α) Δείξετε ότι η ολική μάζα της ράβδου είναι ίση με $M = (3/2)aL$. Επίσης ότι το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται σε απόσταση $x_{C.M.} = (5/9)L$ από το σημείο Ο.

(β) Δείξετε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν στο άκρο της Ο, είναι $I_{\mathrm{O}} = (7/18)ML^2$.

Ε.2 Η μάζα ενός γαλαξία μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κατανεμημένη σε ένα επίπεδο, με τέτοιον τρόπο ώστε η επιφανειακή πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) να είναι ίση με $\sigma = \kappa \mathrm{e}^{-r^2/\alpha^2}$, όπου κ και α είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από το κέντρο του γαλαξία.

(α) Να βρεθεί η μάζα M του γαλαξία συναρτήσει των κ και α.

(β) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του γαλαξία ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και που περνά από το κέντρο του. Δίνεται: $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

(γ) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του γαλαξία ως προς άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Τα αποτελέσματα (β) και (γ) να εκφραστούν συναρτήσει των α και M.

Απ.: (α) $M = \pi\kappa\alpha^2$, (β) $I_z = M\alpha^2$, (γ) $I_\delta = \frac{1}{2}M\alpha^2$.

Ε.3 Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R και ύψος H. Αποτελείται από υλικό του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση $\rho = \rho_0\left(1 - r/R\right)$, όπου ρ_0 είναι θετική σταθερά. (α) Να βρεθεί η μάζα του κυλίνδρου M. (β) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του. (γ) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα παράλληλο προς τον γεωμετρικό του άξονα, και σε απόσταση R από αυτόν. Τα αποτελέσματα (β) και (γ) να εκφραστούν συναρτήσει της ακτίνας R και της μάζας M. Απ.: (α) $M = \frac{1}{3}\pi\rho_0 HR^2$, (β) $I = \frac{3}{10}MR^2$, (γ) $I = \frac{13}{10}MR^2$.

Ε.4 Δύο κυκλικοί δίσκοι με μάζες M_1 και M_2 και ακτίνα R, περιστρέφονται γύρω από κοινό άξονα κάθετο στα επίπεδά τους, και ο οποίος περνά από τα κέντρα τους. Οι γωνιακές ταχύτητες των δίσκων είναι ω_1 και ω_2, και οι στροφορμές τους, L_1 και L_2, αντίστοιχα. Οι δίσκοι έρχονται και παραμένουν σε επαφή. Ποια είναι η τελική κοινή γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων και ποια η τελική απώλεια ενέργειας ΔE;

Απ.: $\omega = \dfrac{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2}{M_1 + M_2}$ $\quad \Delta E = \dfrac{1}{4}\dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}R^2(\omega_2 - \omega_1)^2$.

Ε.5 Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα ΑΒ που συμπίπτει με μια από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^0 με τον τοίχο. Μία σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της πόρτας. Η σφαίρα σφηνώνεται στην πόρτα σε απόσταση a από τον άξονα.

(α) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα ΑΒ. Η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της είναι $I_0 = \frac{1}{6}Ma^2$. (β) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από τη στιγμή που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα;

(γ) Ποιο κλάσμα της ενέργειας της σφαίρας χάνεται όταν αυτή σφηνωθεί στην πόρτα;

Απ.: (α) $I = \left(\frac{1}{3}M + m\right)\alpha^2$, (β) $t = \dfrac{\pi\alpha}{2\upsilon}\left(1 + \dfrac{M}{3m}\right)$, (γ) $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{M}{M + 3m}$.

Ε.6 Ευθύγραμμη ράβδος έχει μήκος l και μάζα m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το ένα της άκρο, Ο.

(α) Η ράβδος ξεκινά από ηρεμία όταν είναι οριζόντια και περιστρέφεται υπό την επίδραση του βάρους της. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια αρχική θέση. (β) Βρείτε την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του κέντρου μάζας της ράβδου. (γ) Βρείτε την οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της ράβδου.

Ε.7 Δίνεται κυκλικός δίσκος ακτίνας *R* και μάζας *M*, ομοιόμορφα κατανεμημένης. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του δίσκου αρχίζει να αυξάνει γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $a = \mathrm{d}M / \mathrm{d}t$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει ομοιόμορφα και κάθετα στο επίπεδο του δίσκου με αμελητέα ταχύτητα. Η αύξηση της μάζας κατανέμεται ομοιόμορφα σε κάθε σημείο του δίσκου. Να διατυπωθεί και να λυθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου και να βρεθεί έτσι η γωνιακή του ταχύτητα $\omega(t)$.

Απ.: $\left(M_0 + \alpha t\right)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \alpha\omega = 0 \quad \omega(t) = \dfrac{\omega_0 M_0}{M_0 + \alpha t}$.

Ε.8 Ένας ομογενής κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας m, μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς του και είναι κάθετος στις επίπεδες επιφάνειές του. Μια σημειακή μάζα m είναι προσκολλημένη σε ένα σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου, διαμετρικά αντίθετο του σημείου Ο. Αρχικά η σημειακή μάζα βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το σημείο Ο και το σύστημα είναι ακίνητο, όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Δείξετε ότι, όταν ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, η γωνιακή του ταχύτητα $\dot{\theta}$ ικανοποιεί τη σχέση: $11R\dot{\theta}^2 = 12g(1 - \cos\theta)$.

Ε.9 Λεπτός ομογενής δίσκος με μάζα M και ακτίνα R μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Α που απέχει απόσταση $R/4$ από το κέντρο του, Ο, και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

(α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Να αποδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα Α είναι $I_A = \frac{9}{16}MR^2$.

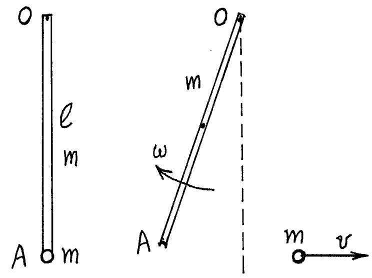
(β) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου για ελεύθερη περιστροφή περί τον άξονα Α, συναρτήσει της γωνίας θ που σχηματίζει ο άξονας ΑΟ με την κατακόρυφη κατεύθυνση. Να βρεθεί η γωνιακή συχνότητα ω_0 για μικρές περιστροφικές ταλαντώσεις του δίσκου περί τον άξονα Α.

Ε.10. Λεπτή ομοιογενής ράβδος έχει μήκος ℓ και μάζα m. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο. Ο άξονας είναι κάθετος στη ράβδο, και περνά από το ένα της άκρο Ο. Μια σημειακή μάζα m είναι στερεωμένη στο ελεύθερο άκρο της ράβδου.

Σε κάποια στιγμή, η σημειακή μάζα εκτοξεύεται, με τη βοήθεια εσωτερικών δυνάμεων, και κινείται με ταχύτητα υ σε κατεύθυνση κάθετη στην αρχική κατεύθυνση της ράβδου.

(α) Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την εκτόξευση;

(β) Πόση ενέργεια απαιτείται για τη διαδικασία;



Ε.11 Ένα παιδί Π του οποίου η μάζα είναι *M*, στέκεται στην άκρη μιας κυκλικής πλατφόρμας, η οποία μπορεί να περιστραφεί γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της Ο. Η πλατφόρμα έχει ακτίνα *R* και μάζα 8*M*, ομογενώς κατανεμημένη, και είναι αρχικά ακίνητη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το παιδί πετάει μια πέτρα μάζας *m* με ταχύτητα υ ως προς την πλατφόρμα, εφαπτομενική της περιμέτρου της πλατφόρμας.

(α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω_0 της πλατφόρμας, αμέσως μόλις το παιδί έχει πετάξει την πέτρα.

(β) Η τριβή από τον άξονα της πλατφόρμας ασκεί, όσο η πλατφόρμα βρίσκεται σε κίνηση, σταθερή ροπή *N* που αντιστέκεται στην περιστροφή της πλατφόρμας. Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης της πλατφόρμας για την περιστροφή που θα επακολουθήσει.

(γ) Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας συναρτήσει του χρόνου, $\omega(t)$. Σε ποια χρονική στιγμή t_0 θα σταματήσει να κινείται η πλατφόρμα;