Λύσεις Ασκήσεων

1) Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, τότε $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > \sum_{k=1}^{n} a_k + 1$.

Λύση: Με επαγωγή. Αν $n=2$, η ανισότητα γίνεται: $(1+a_1)(1+a_2) > a_1 + a_2 + 1$.
Αληθεύει αν $a_1 > 0, a_2 > 0$ αφού $(1+a_1)(1+a_2) = 1 + a_2 + a_1 + a_1 a_2 > 1 + a_1 + a_2$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, έχουμε $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > \sum_{k=1}^{n} a_k + 1$.

Αν $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ είναι θετικοί πραγματικοί, δείχνουμε ότι
$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) > \sum_{k=1}^{n+1} a_k + 1$. Πράγματι, αφού $1 + a_{n+1} > 0$, η επαγωγική υπόθεση δίνει: $(1+a_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > (1+a_{n+1})\left[\sum_{k=1}^{n} a_k + 1\right]$

Άρα,
$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) > \sum_{k=1}^{n} a_k + 1 + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k + 1 + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k >$$
$$> \sum_{k=1}^{n+1} a_k + 1$$
, αφού $a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$ γιατί $a_1 > 0, \dots, a_n > 0, a_{n+1} > 0$.

2) Αν $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ και $b > 0$, τότε $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$.

Λύση: Αν $n = 1$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^1 = \frac{a+b}{2}$. Άρα η ανισότητα ισχύει για $n=1$.
Υποθέτουμε ότι $n \in \mathbb{N}$ και $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$. Θα δείξουμε ότι $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}$. Αφού $\frac{a+b}{2} > 0$, η επαγωγική υπόθεση δίνει: $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)$

Άρα,
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{(a+b)(a^n+b^n)}{4} = \frac{a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1}}{4}$$

Αρκεί λοιπόν για δείξουμε ότι $\dfrac{a^{n+1}+ab^n+ba^n+b^{n+1}}{4} \le \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$

Ισοδύναμα, αρκεί, $a^{n+1}+ab^n+ba^n+b^{n+1} \le 2a^{n+1}+2b^{n+1} \iff$

$ab^n+ba^n \le a^{n+1}+b^{n+1} \iff ba^n-b^{n+1} \le a^{n+1}-ab^n \iff$

$b(a^n-b^n) \le a(a^n-b^n)$. Η τελευταία ανισότητα αληθεύει διότι αν $b \le a$, τότε $b^n \le a^n$, γιατί $b>0$, άρα $a^n-b^n \ge 0$

$\Rightarrow b(a^n-b^n) \le a(a^n-b^n)$.

Αν $a \le b$, τότε $a^n \le b^n$, γιατί $a>0$, άρα $a^n-b^n \le 0$.

$\Rightarrow a(a^n-b^n) \ge b(a^n-b^n)$

3) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $a_{2n-1} \to \lambda$ και $a_{2n} \to \lambda$, τότε $a_n \to \lambda$.

Λύση: Έστω $\epsilon>0$. Πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n-\lambda|<\epsilon$, $\forall n \ge n_0$.

Αφού $a_{2n-1} \to \lambda$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με $|a_{2n-1}-\lambda|<\epsilon$, $\forall n \ge n_1$.

Αφού $a_{2n} \to \lambda$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με $|a_{2n}-\lambda|<\epsilon$, $\forall n \ge n_2$.

Παίρνουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2\}$. Αν $n \ge n_0$, υπάρχουν 2 περιπτώσεις

(i) n = περιττός $= 2k-1$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $n \ge n_0 \Rightarrow n \ge 2n_1 \Rightarrow$

$2k-1 \ge 2n_1 > 2n_1-1 \Rightarrow k > n_1 \Rightarrow |a_{2k-1}-\lambda|<\epsilon \Rightarrow |a_n-\lambda|<\epsilon$.

(ii) n = άρτιος $= 2k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $n \ge n_0 \Rightarrow n \ge 2n_2 \Rightarrow 2k \ge 2n_2$

$\Rightarrow k \ge n_2 \Rightarrow |a_{2k}-\lambda|<\epsilon \Rightarrow |a_n-\lambda|<\epsilon$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, $|a_n-\lambda|<\epsilon$, $\forall n \ge n_0$.