Άσκηση: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1/e$

Λύση: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$, $(n>1)$.

$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$, $\forall n>1$.

Όμως, η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$, είναι υπακολουθία της $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$. Άρα, $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\to e$. Αφού επίσης $1+\frac{1}{n-1}\to 1$, έχουμε ότι $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to 1/e$

Άσκηση: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$.

Λύση: $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αμέσως έχουμε ότι $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\to e$, γιατί η $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$. Άρα,

$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \longrightarrow \sqrt{e}$.

Άσκηση: $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \longrightarrow e^2$.

Λύση: Θέτουμε $a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε,

$$a_{2n}=\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\longrightarrow e^2.$$

Αρκεί λοιπόν, από παλιά άσκηση, να δείξουμε ότι $a_{2n-1}\to e^2$. Έχουμε ότι:

$$\text{(i)}\quad a_{2n-1}=\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{2n-1}<\left(1+\frac{2}{2n-2}\right)^{2n-1}=\left(1+\frac{2}{2n-2}\right)^{2n-2}\left(1+\frac{2}{2n-2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad a_{2n-1}<a_{2n-2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

$$\text{(ii)}\quad a_{2n-1}=\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{2n-1}>\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n-1}=\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad a_{2n-1}>a_{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Συμπεραίνουμε ότι: $a_{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}<a_{2n-1}<a_{2n-2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$, $\forall n\geq 2$.

Αφού $a_{2n}\to e^2\Rightarrow a_{2n-2}\to e^2$, το Θ. Sandwich δίνει ότι $a_{2n-1}\to e^2$ ∎

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει γενικότερα η ισότητα

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Πρόταση 1: Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x>0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα

(2) Η ακολουθία $\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_{n=[x]+1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα

Απόδ: (1) Από το διώνυμο του Newton, όπως ακριβώς στην περίπτωση $x=1$, έχουμε:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}.$$

Άρα,

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = 1+\left[\prod_{m=0}^{n}\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right]\frac{x^k}{k!}$$

$$> 1+\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right]\frac{x^k}{k!} \geq 1+\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτή της περίπτωσης $x=1$.

(2) Όταν $n \geq [x]+1$, τότε $n>x$. Άρα, $1-\frac{x}{n}>0$. Θέτουμε

$$a_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq [x]+1,$$

και δείχνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=[x]+1}^{\infty}$ είναι γν. αύξουσα. Έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{(n+1-x)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{(n-x)^n} = \frac{n+1-x}{n+1}\left[\frac{(n+1-x)n}{(n+1)(n-x)}\right]^n =$$

$$= \frac{n+1-x}{n+1}\left[\frac{n(n-x)+n}{(n+1)(n-x)}\right]^n = \frac{n+1-x}{n+1}\left[\frac{(n+1)(n-x)-(n-x)+n}{(n+1)(n-x)}\right]^n = \frac{n+1-x}{n+1}\left[1+\frac{x}{(n+1)(n-x)}\right]^n$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1-x}{n+1}\left[1+\frac{x}{(n+1)(n-x)}\right]^n, \quad \forall\, n \geq [x]+1.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli λαμβάνουμε ότι

$$\left[1+\frac{x}{(n+1)(n-x)}\right]^n \geq 1+\frac{nx}{(n+1)(n-x)}, \quad \forall n \geq [x]+1$$

Και συνεπώς, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{n+1-x}{n+1}\left[1+\dfrac{nx}{(n+1)(n-x)}\right]$

Η $(a_n)_{n=[x]+1}^{\infty}$ θα είναι γνησίως αύξουσα αν δείξουμε ότι

$$\frac{n+1-x}{n+1}\left[1+\frac{nx}{(n+1)(n-x)}\right] > 1$$

Ισοδύναμα, αν $\dfrac{n+1-x}{n+1}\left[\dfrac{(n+1)(n-x)+nx}{(n+1)(n-x)}\right] > 1 \Leftrightarrow$

$$(n+1-x)\left[(n+1)(n-x)+nx\right] > (n+1)^2(n-x) \Leftrightarrow$$

$$(n+1-x)(n+1)(n-x) + (n+1-x)nx > (n+1)^2(n-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n+1)(n-x) - x(n+1)(n-x) + (n+1-x)nx > (n+1)^2(n-x)$$

$$\Leftrightarrow (n+1-x)nx > x(n+1)(n-x) \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow} (n+1-x)n > (n+1)(n-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-x)n + n > n(n-x) + n - x \Leftrightarrow n > n-x$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανώς αληθής, αφού $x>0$

Άρα, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \ \forall n \geq [x]+1 \Rightarrow$

$(a_n)_{n=[x]+1}^{\infty} \nearrow$.

Πρόταση 2 Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x>0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(1) Η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη

(2) Η ακολουθία $\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=[x]+1}^{\infty}$ είναι φραγμένη

Απόδ: Η (2) προκύπτει εύκολα αφού $0<\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq 1$, $\forall n>x$.

Για την (1) θα εργαστούμε όπως στην περίπτωση $x=1$.

Καταρχήν, αν $0<x\leq 1$, τότε $0<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Δηλαδή η $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, αν $0<x\leq 1$.

Υποθέτουμε ότι $x>1$. Από το διώνυμο Newton έχουμε:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]}_{\text{θετικό} < 1}\frac{x^k}{k!} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Θέτουμε $b_n = \frac{x^{2n}}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, $b_n \to 0$. Πράγματι,

$b_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0<1$

Από τα βασικά όρια έπεται ότι $b_n \to 0$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon=1$, βρίσκουμε $p\in\mathbb{N}$ ώστε $b_n<1$, $\forall n>p$. Άρα, $\boxed{x^{2k}<k!\,,\ \forall k>p}$

Έχουμε τώρα ότι, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{x^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{x^k}{x^{2k}}, \quad \left(\text{αφού } x^{2k} < k! \text{ όταν } k > p\right)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}}_{A} + \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{1}{x}\right)^k = A + \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{1}{x}\right)^k, \quad \forall n > p.$$

Επίσης, $\sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \left(\frac{1}{x}\right)^{p+1} \sum_{k=0}^{n-p-1} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \left(\frac{1}{x}\right)^{p+1} \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{n-p}}{1-\frac{1}{x}} \leq$

$$\overset{(x>1)}{\leq} \left(\frac{1}{x}\right)^{p+1} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{p+1}} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^p(x-1)}$$

Καταλήγουμε στην ανισότητα $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < A + \frac{1}{x^p(x-1)}, \ \forall n > p.$

Επειδή $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq A, \ \forall n \leq p$, παίρνουμε τη σχέση

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < A + \frac{1}{x^p(x-1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, όπου

$A = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!}$. Παρατηρούμε ότι οι A και p είναι ανεξάρτητοι του $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, η $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι άνω φραγμένη, και άρα φραγμένη αφού είναι γνησίως αύξουσα.

__Πόρισμα__: $\forall x \in \mathbb{R}$, η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

__Απόδ__: Αν $x>0$, τα Προτάσεις 1, 2 μας δίνουν ότι η $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

Άρα, από το Αξίωμα Πληρότητας, συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Αν $x<0$, τότε $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{\overset{>0}{\widetilde{-x}}}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

~~Οι Προτάσεις~~ Συμπεραίνουμε πάλι, από τις Προτάσεις 1, 2 και το Αξίωμα Πληρότητας, ότι η $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

__Θεώρημα__: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

__Απόδ__: Αν $x=0$, το συμπέρασμα προφανώς ισχύει. Όταν $x\neq 0$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

__Περ. 1__: $x\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Γνωρίζουμε, από το Πόρισμα, ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in\mathbb{R}$. Θεωρούμε την υπακολουθία $(a_{nx})_{n\geq 1}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Τότε, $a_{nx} = \left(1+\frac{x}{nx}\right)^{nx} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nx}$ (γιατί η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει), έχουμε

ότι $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$, $\forall x\in\mathbb{N}$.

Περ. 2 $x \in \mathbb{Z}$, $x<0$. Θέτουμε $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Θεωρούμε την υπακολουθία $(a_{n|x|})_{n\geq 1}$ της $(a_n)_{n \geq 1}$. Τότε

$$a_{n|x|} = \left(1+\frac{x}{n|x|}\right)^{n|x|} = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{|x|} \longrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{|x|} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x$$

αφού $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 1/e$, από άσκηση. Πάλι από το Πόρισμα έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n|x|} = e^x$.

Περ. 3 : $x \in \mathbb{Q}$. Τότε, $x = \frac{m}{k}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από το Πόρισμα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την υπακολουθία $(a_{|m|n})_{n\geq 1}$. Άρα

$$a_{|m|n} = \left(1+\frac{m}{k|m|n}\right)^{|m|n} = \left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{|m|n}, \quad \text{όπου } \sigma = \frac{m}{|m|} \in \{-1,1\}$$

Άρα, $a_{|m|n} = \left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{\frac{|m|}{k}kn} = \left[\left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{kn}\right]^{\frac{|m|}{k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Γνωρίζουμε όμως, από την Περ. 2, ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)^n = e^\sigma$ και συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{kn} = e^\sigma$. Έπεται τώρα ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_{|m|n} = (e^\sigma)^{\frac{|m|}{k}} = e^{\frac{\sigma|m|}{k}} = e^{\frac{m}{k}} = e^x$$

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{|m|n} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Περ. 4: $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\epsilon > 0$. Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς, μπορούμε να βρούμε ρητούς $\rho_1 < x < \rho_2$ τέτοιους ώστε $e^x - \epsilon < e^{\rho_1}$ και $e^{\rho_2} < e^x + \epsilon$.

Από την Περ. 3 έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\rho_1}{n}\right)^n = e^{\rho_1}$ και $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\rho_2}{n}\right)^n = e^{\rho_2}$.

Υπάρχουν λοιπόν φυσικοί αριθμοί n_1, n_2 τέτοιοι ώστε:

$$e^x - \epsilon < \left(1+\frac{\rho_1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{και}$$

$$\left(1+\frac{\rho_2}{n}\right)^n < e^x + \epsilon, \quad \forall n \geq n_2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, $\forall n \geq n_0$, έχουμε:

$$e^x - \epsilon < \left(1+\frac{\rho_1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{\rho_2}{n}\right)^n < e^x + \epsilon.$$

Δηλαδή, $\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$

Αφού $\epsilon > 0$ τυχόν, έπεται ότι $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \forall x \in \mathbb{R}$.

__Σημείωση__: Στην απόδειξη της Περίπτωσης 3, κάναμε χρήση του ακόλουθου αποτελέσματος: Αν $\left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\sigma}$, τότε

$$\left[\left(1+\frac{\sigma}{kn}\right)^{kn}\right]^{\frac{|m|}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(e^{\sigma}\right)^{\frac{|m|}{k}}.$$

Αυτό προκύπτει από ένα γενικότερο αποτέλεσμα που περιγράφεται ως άσκηση:

Άσκηση: Έστω $(x_n)_{n\ge 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών με $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ με κάποιο $x\in\mathbb{R}$ ($x\ge 0$). Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν $\lambda=0$, τότε $x_n^{\lambda} \to 1$.

2) Αν $\lambda>0$, τότε $x_n^{\lambda}\to x^{\lambda}$ (όπου, $0^{\lambda}=0$, αν $\lambda>0$)

3) Αν $\lambda<0$ και $x>0$, τότε $x_n^{\lambda} \to x^{\lambda}$.

4) Αν $\lambda<0$ και $x=0$, τότε $x_n^{\lambda}\to +\infty$.

Απόδ: (1): Ισχύει προφανώς γιατί $x_n^{\lambda}=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(2) Αν $x=0$, τότε θα δείξουμε ότι $x_n^{\lambda}\to 0$. Πράγματι, έστω $\epsilon>0$. Τότε και $\epsilon^{1/\lambda}>0$. Άρα, αφού $x_n\to 0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_n|=x_n<\epsilon^{1/\lambda}$, $\forall n\ge n_0$. Έπεται τώρα ότι $\overset{(\lambda>0)}{}$ $x_n^{\lambda}<\epsilon$, $\forall n\ge n_0$.
Αφού $\epsilon>0$ είναι τυχόν, έχουμε ότι $x_n^{\lambda}\to 0$.
Αν $x>0$, υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(x_n^{\lambda})_{n\ge 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο x^{λ}. Τότε θα υπάρχει $\epsilon_0>0$ ώστε $x_n^{\lambda}\notin(x^{\lambda}-\epsilon_0, x^{\lambda}+\epsilon_0)$ για άπειρα $n\in\mathbb{N}$. Κατά συνέπεια, θα υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

Είτε $x_n^{\lambda}<x^{\lambda}-\epsilon_0$, για άπειρα $n\in\mathbb{N}$.

Είτε $x_n^{\lambda}>x^{\lambda}+\epsilon_0$, για άπειρα $n\in\mathbb{N}$.

Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\ge 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\ge 1}^{\infty}$ τέτοια ώστε:

Είτε $x_{k_n}^{\lambda} < x^{\lambda} - \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Είτε $x_{k_n}^{\lambda} > x^{\lambda} + \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε, αφού $\lambda > 0$, ότι $x_{k_n} < (x^{\lambda} - \epsilon_0)^{1/\lambda}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $x = \lim_{n \to \infty} x_{k_n} \leq (x^{\lambda} - \epsilon_0)^{1/\lambda}$. Δηλαδή, $x^{\lambda} \leq x^{\lambda} - \epsilon_0 < x^{\lambda}$. Άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $x \geq (x^{\lambda} + \epsilon_0)^{1/\lambda} \Rightarrow x^{\lambda} \geq x^{\lambda} + \epsilon_0 > x^{\lambda}$: άτοπο. Άρα, συνεπώς, $x_n^{\lambda} \to x^{\lambda}$.

(3) Αν $\lambda < 0$, τότε $-\lambda > 0$. Από την (2) παίρνουμε ότι $x_n^{-\lambda} \to x^{-\lambda}$. Όμως, $x > 0$. Άρα $x^{-\lambda} > 0$. Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι $\frac{1}{x_n^{-\lambda}} \to \frac{1}{x^{-\lambda}}$. Δηλαδή, $x_n^{\lambda} \to x^{\lambda}$.

(4) Αν $\lambda < 0$ και $x_n \to 0$, τότε από (2) έχουμε ότι $x_n^{-\lambda} \to 0$. Βέβαια, $x_n^{-\lambda} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $\frac{1}{x_n^{-\lambda}} \to +\infty \Rightarrow x_n^{\lambda} \to +\infty$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$, η σχέση αυτή αποδείχθηκε στο Θεώρημα Euler. Σημειώνεται ότι τα αθροίσματα $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ δίνουν

πολύ καλές προσεγγίσεις του αριθμού e^x, $x\in\mathbb{R}$.
Αυτό είναι και το περιεχόμενο της παρακάτω Πρότασης.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $x\in\mathbb{R}$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν $|x|\le 1$ και $p<n$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε

$$\sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \le \frac{1}{p!}$$

(ii) Αν $|x|>1$ και $p\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x|^{2k}<k!$, $\forall k>p$, τότε

$$\sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \le \frac{1}{|x|^p(|x|-1)}, \quad \forall n>p.$$

<u>Απόδ</u>: (i)

$$\sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \le \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k!} = \left[\frac{1}{(p+1)!}+\frac{1}{(p+2)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right] =$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}+\cdots+\frac{1}{(p+2)\cdots(p+n-p)}\right]$$

$$< \frac{1}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n-p)}\right] =$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-p)!}\right] < \frac{e-1}{(p+1)!} = \frac{e-1}{(p+1)(p!)} \le \frac{1}{p!}, \quad \forall n>p.$$

(ii)

$$\sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \le \sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{|x|^{2k}} = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{1}{|x|}\right)^k = \frac{1}{|x|^{p+1}} \sum_{i=0}^{n-p-1} \frac{1}{|x|^i} =$$

$$= \frac{1}{|x|^{p+1}}\left[1+\frac{1}{|x|}+\dots+\left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-p-1}\right] = \frac{1}{|x|^{p+1}}\,\frac{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-p}}{1-\frac{1}{|x|}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \le \frac{1}{|x|^{p+1}}\,\frac{|x|}{|x|-1} = \frac{1}{|x|^p(|x|-1)}, \ \forall n>p.$$

<u>Παρατήρηση:</u> 1) Αν $x\in\mathbb{R}$, πάντοτε υπάρχει $p\in\mathbb{N}$ ώστε $|x|^{2k}<k!$, $\forall k>p$.

Πράγματι, αν $x=0$, είναι προφανές. Αν $x\neq 0$, θέτουμε $c_n=\frac{|x|^{2n}}{n!}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0<1.$

Άρα, από βασικό όριο, έχουμε ότι $c_n\to 0$. Άρα θα υπάρχει $p\in\mathbb{N}$ με $c_k<1$, $\forall k>p$. Δηλαδή, $|x|^{2k}<k!$, $\forall k>p$.

2) Θέτουμε $b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (όπου $x\in\mathbb{R}$ σταθερό).

Αν $|x|\le 1$ και $\epsilon>0$, τότε υπάρχει $p\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{p!}<\epsilon$ (γιατί $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p!}=0$). Άρα, από το (1) της Πρότασης, έχουμε ότι $\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\frac{1}{p!}<\epsilon$, $n>m$. Αν $m,n\in\mathbb{N}$ και $m>p$, τότε

$$|b_m-b_n|\le\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}<\epsilon.$$

Δηλαδή, η $(b_n)_{n\ge 1}$ είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} b_n\in\mathbb{R}$.

Αν $|x|>1$, τότε $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{|x|^p}=0$, από βασικό όριο.

Αν $\epsilon>0$, τότε υπάρχει $p\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{|x|^p(|x|-1)}<\epsilon$.

Το (ii) της πρότασης μας δίνει ότι $\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}<\epsilon$, $\forall n>p$. Άρα, αν $n>m>p$, έχουμε ότι

$|b_n-b_m|\le\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}<\epsilon$. Δηλαδή η ακολουθία

$(b_n)_{n\ge1}^{\infty}$ είναι Cauchy, $\forall x\in\mathbb{R}$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\in\mathbb{R}$,

$\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u>: $e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: <u>Περ. 1</u> : $|x|\le 1$. Αν $\epsilon>0$, αφού $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p!}=0$, υπάρχει

$p_0\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{p!}<\epsilon$, $\forall p\ge p_0$. Εφαρμόζοντας το (i) της Πρότασης βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\frac{1}{p!}<\epsilon,\ \forall n>p\ge p_0 \quad *}$$

Έχουμε τώρα ότι $\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|$ <u>Διώνυμο Newton</u>

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|.$$

Όταν $n>p\ge p_0$, έχουμε:

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| \underset{\text{Ανισ.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}} \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| +$$

$$+\sum_{k=p+1}^{n}\underbrace{\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]}_{<1}\frac{|x|^k}{k!} \implies$$

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k}\right| + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}$$

$$< \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| + \epsilon, \quad \text{λόγω } (*)$$

αφού $n > p \geq p_0$.

Σταθεροποιούμε $p \geq p_0$. Στέλνοντας $n \to \infty$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}$$

Άρα, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| = 0$

Έπεται τώρα, ότι $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| \leq 0+\epsilon=\epsilon, \ \forall p \geq p_0.$

$$\implies \left|e^x-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \epsilon, \quad \forall p \geq p_0.$$

Το $\epsilon>0$ ήταν τυχαίο. Άρα, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=e^x$, αν $|x|\leq L$

$\underline{\Pi\varepsilon\rho.\ 2}$: $|x|>1$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 0$, υπάρχει $p_1 \in \mathbb{N}$

ώστε $|x|^{2k} < k!$, $\forall k > p_1$. Επίσης, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|x|^n} = 0$. Αν $\epsilon>0$,

υπάρχει $p_0 \in \mathbb{N}$, $p_0 > p_1$ με $\frac{1}{|x|^p} < \epsilon(|x|-1)$, $\forall p \geq p_0$.

Εφαρμόζοντας το (ii) της πρότασης βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{1}{|x|^p(|x|-1)} < \epsilon, \quad \forall\, n>p\geq p_0 \quad **}$$

Όπως και από Περ. 1 βρίσκουμε, όταν $n>p\geq p_0$, ότι

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| + \sum_{k=p+1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}$$

$$< \left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right| + \epsilon, \quad \text{λόγω } (**)$$

Κρατώντας το $p\geq p_0$ σταθερό, τότε για $n\to\infty$, έχουμε ότι

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right] = 1$, $\forall\, 1\leq k<p$. Άρα, για $n\to\infty$

παίρνουμε: $\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\le\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|+\epsilon,\ \forall p\ge p_0.$

$$\Rightarrow \left|e^x-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\le\epsilon,\quad \forall p\ge p_0.$$ Αφού $\epsilon>0$ τυχόν, έπεται ότι $e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, αν $|x|>1$.

<u>Άσκηση</u>: Αν $|x|\le 1$ και $p<n$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε

$$\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\frac{|x|^{p+1}}{p!}$$

<u>Λύση</u>: $$\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}=\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{|x|^{p+2}}{(p+2)!}+\dots+\frac{|x|^n}{n!}=$$

$$=\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\left[1+\frac{|x|}{p+2}+\frac{|x|^2}{(p+2)(p+3)}+\dots+\frac{|x|^{n-p-1}}{(p+2)(p+3)\cdots(p+n-p)}\right]$$

$$\overset{(|x|\le 1)}{\le}\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{(p+2)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}+\dots+\frac{1}{(p+2)(p+3)\cdots(p+n-p)}\right]$$

$$\le\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n-p)}\right]$$

$$=\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-p)!}\right]\le$$

$$\le\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\Bigg[\underbrace{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-p)!}}_{<e}-1\Bigg]\le\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}(e-1)\le\frac{|x|^{p+1}}{(p!)(p+1)}(p+1)=\frac{|x|^{p+1}}{p!}$$

(γιατί $e-1<2\le p+1$)

Άσκηση: Αν $|x|\leq 1$, τότε $\left|e^x-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{|x|^{p+1}}{p!}$, $\forall p\in\mathbb{N}$.

Λύση: Έστω $p\in\mathbb{N}$. Τότε $\forall\, n>p$ έχουμε από το διώνυμο Newton

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}$$

Άρα, $$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|1+\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-1-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}\right|\overset{\text{Τριγ.}}{\underset{\text{Ανισ.}}{\leq}}$$

$$\leq\left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}$$

$$\leq\left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\quad\text{, αφού}$$

$0<1-\frac{m}{n}\leq 1$, $\forall\, m=0,\dots,k-1$ $(k-1<n)$.

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $\sum_{k=p+1}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\leq\frac{|x|^{p+1}}{p!}$

Έπεται τώρα ότι:

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{p}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|+\frac{|x|^{p+1}}{p!}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\leq 1$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ με $n>p$.

Για $p\in\mathbb{N}$ σταθερό και $n>p$ με $n\to+\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$, ενώ, $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)=1$, $\forall k=1,\dots,p$.

Παίρνοντας όριο καθώς $n\to+\infty$, στην παραπάνω ανισότητα, λαμβάνουμε ότι:

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=1}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|+\frac{|x|^{p+1}}{p!}=\frac{|x|^{p+1}}{p!}$$

Δηλαδή, $\left|e^x-\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{|x|^{p+1}}{p!}$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x|\leq 1$.

Άσκηση: Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών, $x_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, με $x_n\to 0$. Τότε, $$\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\to 0$$

Λύση: Αφού $|x_n|\to 0$, θα υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ με $|x_n|<1$, $\forall n\geq n_1$.

Από την προηγούμενη άσκηση, για $p=1$, έχουμε ότι
$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{|x|^2}{1!}\quad,\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ με } |x|\leq 1.$$

Άρα, $|e^x-1-x|\leq x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\leq 1$.

Εφαρμόζουμε για $x=x_n$, $\forall n\geq n_1$, και έχουμε:
$$|e^{x_n}-1-x_n|\leq x_n^2\quad,\ \forall n\geq n_1 \Rightarrow$$
$$\frac{|e^{x_n}-1-x_n|}{|x_n|}\leq\frac{x_n^2}{|x_n|}\quad,\ \forall n\geq n_1 \Rightarrow$$
$$\left|\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-1\right|\leq|x_n|\quad,\ \forall n\geq n_1.$$

Αφού $x_n\to 0$, από Θ. Sandwich, παίρνουμε ότι $\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-1\to 0$
$$\Rightarrow\ \frac{e^{x_n}-1}{x_n}\to 1$$

Άσκηση: Αν $x_n\to x$, $x_n\neq x$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $$\frac{e^{x_n}-e^x}{x_n-x}\to e^x$$

Λύση: $$\frac{e^{x_n}-e^x}{x_n-x}=e^x\,\frac{e^{x_n-x}-1}{x_n-x}=e^x\,\frac{e^{y_n}-1}{y_n},$$ όπου $y_n=x_n-x$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αφού $y_n\to 0$, από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε $\frac{e^{y_n}-1}{y_n}\to 1$
$$\Rightarrow\ \frac{e^{x_n}-e^x}{x_n-x}\to e^x$$