Ο αριθμός e

Ο αριθμός του Euler, e, ανακαλύφθηκε το 18ο αιώνα σε μία προσπάθεια κατανόησης του τύπου του ανατοκισμού.

Θυμίζουμε ότι αν ένα ποσό $A>0$ τοκισθεί για 1 χρόνο με επιτόκιο $0<x<1$, τότε στο τέλος του χρόνου το ποσό θα έχει γίνει $A+Ax=A(1+x)$. Ο ανατοκισμός του ποσού A, δύο φορές το χρόνο, με επιτόκιο $0<x<1$, είναι ο τοκισμός του A με επιτόκιο $\frac{1}{2}x$ το 1ο εξάμηνο του έτους, και ο εκ νέου τοκισμός του συσσωρευμένου ποσού $A\left(1+\frac{x}{2}\right)$ του 1ου εξαμήνου, με επιτόκιο $\frac{x}{2}$ το 2ο εξάμηνο του έτους. Στο τέλος του έτους το συσσωρευμένο ποσό θα είναι

$$A\left(1+\frac{x}{2}\right)+A\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}=A\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)=A\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

Ο ανατοκισμός του A, τρεις φορές το χρόνο, με επιτόκιο $0<x<1$ συσσωρεύει ποσό $A\left(1+\frac{x}{3}\right)$ το 1ο τετράμηνο του έτους, έτσι το 2ο τετράμηνο συσσωρεύεται ποσό $A\left(1+\frac{x}{3}\right)+A\left(1+\frac{x}{3}\right)\frac{x}{3}=$
$=A\left(1+\frac{x}{3}\right)^2$, ενώ το 3ο και τελευταίο τετράμηνο του έτους, θα συσσωρευτεί ποσό $A\left(1+\frac{x}{3}\right)^2+A\left(1+\frac{x}{3}\right)^2\frac{x}{3}=A\left(1+\frac{x}{3}\right)^3$.

Βλέπουμε εύκολα, με επαγωγή, ότι αν $n\in\mathbb{N}$ και το ποσό $A>0$ ανατοκισθεί n φορές μέσα στο έτος, με επιτόκιο $x\in(0,1)$, τότε στο τέλος του έτους συσσωρεύεται το ποσό

$$A\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Το ερώτημα που απασχόλησε, το 18ο αιώνα, ήταν η συμπεριφορά της ποσότητας $A\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ όταν το $n \in \mathbb{N}$ είναι αρκετά μεγάλο. Στην ουσία το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με τη μελέτη της συμπεριφοράς της ποσότητας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ καθώς το $n \to \infty$. (Παίρνουμε δηλαδή $A = x = 1$)

Η (εκ του πονηρού!) αφελής αντιμετώπιση του προβλήματος της εκτίμησης της ποσότητας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, με μεγάλα $n \in \mathbb{N}$, κατέληγε στο συμπέρασμα ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 1$, όταν $n \to \infty$, με το σκεπτικό ότι, καθώς $n \to \infty$, το $\frac{1}{n} \approx 0$ και άρα $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$. Η εμπειρία όμως (κυρίως πολλών τυχερών παιγνίων οι οποίοι δανείζονταν ποσά με πολλαπλό ανατοκισμό για μία σύντομη περίοδο) έδειχνε ότι το δανεισμένο ποσό σχεδόν τριπλασιάζεται σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα.

Για την επίλυση του προβλήματος πολλοί απευθύνθηκαν στον Euler ο οποίος, για να απαντήσει, μελέτησε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ως προς τη σύγκλιση, και απέδειξε το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u> (Euler) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) $a_n < a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(2) $2 \leq a_n < 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, με $2<e<3$.

(4) $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

<u>Παρατήρηση</u>: Τα (1), (2) του θεωρήματος μας δίνουν, λόγω του Αξιώματος Πληρότητας, ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Στα μέσα του 18ου αιώνα, όταν ο Euler απέδειξε το παραπάνω θεώρημα, κανείς δεν μπορούσε να υποψιαστεί ποιο ακριβώς είναι αυτό το όριο. Ο Euler έδειξε επίσης ότι το όριο αυτό είναι άρρητος αριθμός και ότι $e\simeq 2{,}718$. Στην πραγματικότητα ο e ήταν ένας καινούριος αριθμός, δεν τον γνώριζαν πριν την ανακάλυψη του Euler, και πήρε το σύμβολο e, τιμής ένεκεν, από το πρώτο γράμμα του επωνύμου του Euler.

Προς το τέλος του 19ου αιώνα αποδείχθηκε ότι ο e <u>δεν</u> ήταν ρίζα κάποιου πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές (όπως είναι οι άρρητοι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$). Ο e είναι ένας υπερβατικός αριθμός. Ο π είναι ένα άλλο παράδειγμα υπερβατικού αριθμού.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Euler θα χρειαστούμε τα ακόλουθα βοηθητικά αποτελέσματα:

(*) $2^{k-1} \le k!$, $\forall k \in \mathbb{N}$. [<u>Απόδειξη</u>: Με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$. Αν $k=1$, έχουμε $2^0 \le 1! = 1$, αληθής. Αν $2^{k-1} \le k!$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε, $2^{k} = 2^{k-1} \cdot 2 \le (k!) \cdot 2 \le (k!)(k+1) = (k+1)!$]

(**) Αν $1 \le k \le n$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε

$$\boxed{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)}$$

[Πράγματι,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!)[(n-k)!]} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot (n-k)(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-2)(n-1)\cdot n}{[(n-k)!](k!)} =$$

$$= \frac{[(n-k)!](n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-2)(n-1)\cdot n}{[(n-k)!](k!)} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)\cdot n}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\Big[\underbrace{(n-0)(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-2)][n-(k-1)]}_{k-\text{παράγοντες}}\Big] = \frac{1}{k!}\prod_{m=0}^{k-1}(n-m)$$

Δηλαδή, $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{m=0}^{k-1}(n-m)$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\prod_{m=0}^{k-1}(n-m) = \frac{1}{k!}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[\prod_{m=0}^{k-1}(n-m)\right] =$$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{m=0}^{k-1}\left[\frac{1}{n}(n-m)\right] = \frac{1}{k!}\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)$$]

<u>Απόδειξη</u> (Θεωρήματος Euler): Χρησιμοποιώντας το διώνυμο Newton,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n}\right)\right] \frac{1}{k!}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.}$$

(MF)

(1) Εφαρμόζουμε την (MF) για το $n+1$ $(n\in\mathbb{N})$:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right] \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 + \left[\prod_{m=0}^{n} \left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right] \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right] \frac{1}{k!}$$

$$> 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right] \frac{1}{k!}, \text{ γιατί } \frac{m}{n+1} < 1, \ \forall m=0,\dots,n.$$

Επίσης, $\displaystyle\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n+1}\right) \geq \prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n}\right)$, αφού $\displaystyle\frac{m}{n+1} \leq \frac{m}{n} \leq 1$ όταν

$0 \leq m \leq k-1 < n.$

Άρα, $\displaystyle\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{m=0}^{k-1} \left(1-\frac{m}{n}\right)\right] \frac{1}{k!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, από (MF).

Δηλαδή, $a_{n+1} > a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}. \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}^{\infty} \uparrow.$

(2) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!}$

Όμως, $0 \le 1-\frac{m}{n} \le 1$, $\forall m=0,\dots,k-1$ (αφού $k\le n$)

Άρα, $\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right) \le 1$, $\forall k\le n$.

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \overset{(*)}{\le} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= 1+\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Επίσης, αφού $(a_n)_{n=1}^{\infty} \nearrow$, έχουμε $2=a_1\le a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 2\le a_n<3, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(3) Από (1) και (2) έχουμε ότι η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονη και φραγμένη. Από το Αξίωμα Πληρότητας έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} a_n \in\mathbb{R}$. Ορίζουμε $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Αφού $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι $2\le a_n<e$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $e<3$.

Στην απόδειξη του (2) έχουμε την ανισότητα:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 3, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 3$. Τότε, από θεώρ. Sandwich, έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k\geq 1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 3$.

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k\geq 1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k\geq 1}^{n}\frac{1}{k!}\right] = 0$. Δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 1}^{n}\left[\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{k!}\right] = 0.$$

Όμως $\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{k!}\geq 0$ $\forall k\in\mathbb{N}$, λόγω $(*)$. Άρα, αν $n\geq 3$, έχουμε ότι

$$\sum_{k\geq 1}^{n}\left[\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{k!}\right] \geq \frac{1}{2^{3-1}}-\frac{1}{3!} = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad \forall n\geq 3$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 1}^{n}\left[\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{k!}\right] \geq \frac{1}{12},$$ άτοπο.

Άρα, $2 < e < 3$.

Για το (4), θέτουμε $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού όλοι οι προσθετέοι είναι θετικοί, έχουμε ότι $b_n < b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $(b_n)_{n \geq 1} \uparrow$. Επίσης, από την απόδειξη του (2) έχουμε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Δηλαδή, η $(b_n)_{n\geq 1}$ είναι και φραγμένη. Άρα, από το Αξίωμα πληρότητας έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} b_n = e$. Αφού $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $e \leq \lim_{n\to\infty} b_n$. Για την αντίστροφη ανισότητα, σταθεροποιούμε $\ell \in \mathbb{N}$ τυχόν. Τότε, $\forall n \geq \ell$,

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!} \geq 1 + \sum_{k=1}^{\ell}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!}$$

Κρατώντας το $\ell \in \mathbb{N}$ σταθερό, αφήνουμε το $n \to +\infty$.

Τότε, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!} =$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\ell} \lim_{n\to\infty}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\ell}\left[\prod_{m=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]\frac{1}{k!}$$

$= 1 + \sum_{k=1}^{\ell}\left[\prod_{m=0}^{k-1} 1\right]\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{k!} = b_\ell$. Άρα, $b_\ell \leq e$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{\ell\to+\infty} b_\ell = e \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e$