ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός: Δυναμοσειρά κέντρου $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι μία οικογένεια σειρών της μορφής $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, όπου $x \in \mathbb{R}$ είναι μεταβλητή (ή παράμετρος).

Σημείωση: Γράφουμε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ για τη σειρά $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, ερμηνεύοντας το $(x-x_0)^0 = 1$, ακόμη και όταν $x = x_0$.

Παρατηρούμε ότι μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ γενικεύει την έννοια του πολυωνύμου: Πράγματι, αν $p \in \mathbb{N}$, τότε το $\sum_{n=0}^{p} a_n(x-x_0)^n$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq p$.

Γι' αυτό οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ λέγονται και συντελεστές της δυναμοσειράς.

Όταν μας δίνουν μία δυναμοσειρά, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, με κέντρο $x_0 \in \mathbb{R}$, μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ορισμός: Ονομάζουμε διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ το σύνολο όλων των $x\in\mathbb{R}$ τέτοιων ώστε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει στον a_0, όταν $x=x_0$. Συνεπώς το διάστημα σύγκλισης μίας δυναμοσειράς είναι πάντοτε μη κενό.
Θα δούμε, μέσω του κριτηρίου λόγου, ότι το διάστημα σύγκλισης έχει κέντρο το x_0.

Σημείωση: Είναι δυνατό, στη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, να έχουμε $a_n=0$, για άπειρα $n\in\mathbb{N}$, ή, $a_n=0$ για $n<n_0$, όπου $n_0\in\mathbb{N}$.

Για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε πρώτα ότι $a_n\neq 0$, $\forall n\geq n_0$ (όπου $n_0\in\mathbb{N}$).
Επίσης υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < +\infty$.
Σταθεροποιούμε κάποιο $x\in\mathbb{R}$, $x\neq x_0$, και εφαρμόζουμε

το κριτήριο λόγου για τη σειρά $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|<1$, τότε το κριτήριο λόγου μας δίνει ότι η $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, άρα και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, συγκλίνει σε πραγματικό. Θέτουμε $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, με $R=+\infty$, αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$. Τότε, αν

$$|x-x_0|<R \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ συγκλίνει}$$

σε πραγματικό αριθμό. Ειδικότερα, αν $R=+\infty$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|>1$, δηλαδή, αν $|x-x_0|>R$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ δεν συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό.

<u>Συμπέρασμα</u>: Αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<+\infty$ και $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, τότε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι ένα από τα

(x_0-R, x_0+R), $[x_0-R, x_0+R]$, $(x_0-R, x_0+R]$, $[x_0-R, x_0+R)$

Το ποιο από τα 4 αυτά διαστήματα είναι το διάστημα σύγκλισης, το βρίσκουμε ελέγχοντας αν η $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει σε πραγματικό όταν $x=x_0-R$, ή, $x=x_0+R$.

Πρέπει δηλαδή να ελέγξουμε τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n R^n$ και $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(-R)^n$ (εδώ, $R<+\infty$)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Γι' αυτές τις δύο σειρές το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα. Πρέπει να εφαρμόσουμε κάποιο άλλο κριτήριο.

Όταν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, τότε $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| = +\infty > 1$,

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq x_0$. Σε αυτή την περίπτωση το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{x_0\}$.

<u>Ορισμός</u>: Ονομάζουμε ακτίνα σύγκλισης R, της $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, το μισό του μήκους του διαστήματος σύγκλισης.

Έτσι, αν $R=0$, το $\Delta =$ διάστημα σύγκλισης $= \{x_0\}$.

Αν $R=+\infty$, $\Delta=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Αν $0<R<+\infty$, $\Delta =$ ένα από τα 4 διαστήματα με άκρα x_0-R, x_0+R.

Σημείωση: Αν $a_n = 0$, για άπειρα $n\in\mathbb{N}$, θέτουμε $M=\{k_0<k_1<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots\}$ το σύνολο των $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ για τα οποία $a_n\neq 0$. Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n}(x-x_0)^{k_n}$ και $a_{k_n}\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{k_{n+1}}}{a_{k_n}}\right||x-x_0|^{k_{n+1}-k_n}<1$

Παραδείγματα: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(x+1)^n$: Κριτήριο λόγου: (κέντρο $x_0=-1$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}\,\frac{2^n}{n(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}|x+1| = \frac{|x+1|}{2}.$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό όταν $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -3<x<1$

Έπεται ότι η ακτίνα σύγκλισης $R=\frac{1+3}{2}=2$

Όταν $|x+1|>2$, δηλαδή είτε $x>1$, είτε $x<-3$, η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό (κρ. λόγου)

Πρέπει να ελέγξουμε τα άκρα $x=1$ και $x=-3$. Να δούμε δηλαδή αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}2^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(-3+1)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(-2)^n$ συγκλίνουν σε πραγματικό.

Για $x=1$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n\geq 0} n = +\infty$

Για $x=-3$, η σειρά γίνεται $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} n(-1)^n$, ~~αποκλίνει~~

δεν συγκλίνει σε πραγματικό αφού $|n(-1)^n| = n \to +\infty$

Άρα $\Delta = (-3,1)$.

2) $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$. Κρ. Λόγου: $\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(-1)^n x^n} \right| = \frac{n+1}{n+2}|x| \to |x|$

Άρα, αν $|x|<1$ η δυναμοσειρά συγκλίνει σε πραγματικό.

Αν $|x|>1$, η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό

Άρα, $-1<x<1 \Rightarrow$ Η δυναμοσειρά συγκλίνει σε πραγματικό

και $x<-1$, ή, $x>1 \Rightarrow$ Η δυναμοσ. δεν συγκλίνει σε πραγματικό

$\Rightarrow -1, 1$ είναι τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης

$\Rightarrow R = 1$.

Όταν $x=-1$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(αρμονική σειρά) $\Rightarrow -1 \notin \Delta =$ διάστημα σύγκλισης

Όταν $x=1$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό λόγω του κριτηρίου Leibniz (εναλλάσσουσα και $\frac{1}{n+1} \downarrow 0$) $\Rightarrow 1 \in \Delta$. Άρα, $\Delta = (-1,1]$

3) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot \frac{(x+4)}{(2n+3)!}$: Κρ. Λόγου, $\left|\frac{(-1)^{n+1}(x+4)^{n+1}}{(2n+5)!}\,\frac{(2n+3)!}{(-1)^n (x+4)^n}\right| =$

$$= \frac{1}{(2n+4)(2n+5)}|x+4| \longrightarrow 0 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}. \Rightarrow R=+\infty \Rightarrow$$
$$\Delta = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

4) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}(3x+5)^{2n+3} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}3^{2n+3}\left(x+\frac{5}{3}\right)^{2n+3}$

δυναμοσειρά κέντρου $x_0 = -5/3$.

Κριτήριο Λόγου: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(3x+5)^{2n+5}}{(n+2)2^{n+1}}\,\frac{(n+1)2^n}{(-1)^n(3x+5)^{2n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}|3x+5|^2 =$

$= |3x+5|^2/2$. Άρα,

Αν $|3x+5|^2<2$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό.
Αν $|3x+5|^2>2$, η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό.
Αν $|3x+5|^2=2$, δηλαδή, $3x+5=\pm\sqrt{2}$, ή, $x=\frac{-5\pm\sqrt{2}}{3}$, εξετάζουμε τις αντίστοιχες σειρές: Για $x=\frac{-5+\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 3x+5=\sqrt{2}$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}(\sqrt{2})^{2n+3} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}(2^{1/2})^{2n}2^{3/2} = 2^{3/2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, η οποία συγκλίνει σε πεπερασμένο από το κριτήριο Leibnitz.
Αν $x=\frac{-5-\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 3x+5=-\sqrt{2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}(-\sqrt{2})^{2n+3} = -2^{3/2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, συγκλίνει σε πεπερασμένο. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι $\left[-\frac{5+\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}-5}{3}\right]$ και ακτίνα σύγκλισης $R=\frac{\sqrt{2}}{3}$