<u>Κριτήρια Σύγκρισης</u>

Εφαρμόζονται με σειρές θετικών όρων. Έχουμε ήδη δει ότι αν οι ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ικανοποιούν

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(i) Αν $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε αριθμό, δηλ., $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n < +\infty$, τότε και η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε αριθμό με $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$

(ii) Αν $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = +\infty$

Το επόμενο κριτήριο άμεσης σύγκρισης γενικεύει τα παραπάνω

<u>Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης</u>: Έστω $a_n \geq 0$ και $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n < +\infty$, τότε και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < +\infty$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Μπορεί όμως $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n > \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$.

(ii) Αν $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = +\infty$

<u>Απόδ</u>: Προκύπτουν άμεσα αφού $\sum_{n\geq n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n\geq n_0}^{\infty} b_n$ και

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n\geq n_0}^{\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = \sum_{n\geq 1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n\geq n_0}^{\infty} b_n$$

<u>Παρατήρηση</u>: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ συγκλίνει σε πραγματικό αφού $\frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει σε πραγματικό ως p-σειρά με $p = 2 > 1$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3}$ συγκλίνει σε πραγματικό γιατί $\frac{1}{n^2-3} < \frac{2}{n^2}$, $\forall n \geq 3$

αφού $n^2 < 2n^2 - 6$, $\forall n \geq 3$, και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

(p-σειρά με $p = 2 > 1$).

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(5n+1)}{n^3}$ συγκλίνει σε πραγματικό γιατί $0 \leq \frac{\cos^2(5n+1)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$ (p-σειρά, $p = 3 > 1$).

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ γιατί $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{3n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, αρμονική σειρά.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{3^n}$ συγκλίνει σε πραγματικό γιατί $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(δείξτε το με επαγωγή). Άρα, $\frac{n+2^n}{3^n} < \frac{2^n+2^n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2/3}{1-2/3} = 2$ (γεωμ. σειρά)

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ συγκλίνει σε πραγματικό γιατί $n^2 - n + 1 > \frac{1}{2} n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(αφού $\frac{n^2}{2} > n-1 \iff n^2 > 2n-2 \iff n^2-2n+1 > -1 \iff (n-1)^2 > -1$.)

Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (p-σειρά, $p = 2 > 1$)

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} = +\infty$ γιατί $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 3$ και

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (αρμονική σειρά)

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{3^n}$ συγκλίνει σε πραγματικό γιατί $\left|\frac{\sin(n^2)}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = 1/2$ (γεωμ. σειρά)

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{3^n}$ συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει

σε πραγμ. αριθμό από το θεώρ. Cauchy.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3} = +\infty$ αφού $\frac{n}{n^2+3} > \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 2$ και

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (αρμονική σειρά)

10) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$ γιατί $\sqrt[n]{n} - 1 > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 3$

αφού $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n} \iff n > (1+\frac{1}{n})^n$, $\forall n \geq 3$. Πράγματι, γνωρί-

ζουμε (θ. Euler) ότι $(1+\frac{1}{n})^n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

11) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = +\infty$, αφού $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

(p-σειρά, $p = 1/2 < 1$).

Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης: Πολλές φορές, προσπαθώντας να εφαρμόσουμε το Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης, είναι δύσκολο να εντοπίσουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$. Σε αυτή την περίπτωση είναι χρήσιμη μία ασυμπτωτική μορφή σύγκρισης.

ΚΟΣ: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών και $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ με $0 \leq \lambda \leq +\infty$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $0 < \lambda < +\infty$, η σειρά $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό $\iff$ $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (όχι στον ίδιο απαραίτητα) πραγματικό.

(ii) Αν $\lambda = 0$ και η $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, τότε και η $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (όχι στον ίδιο) πραγματικό.

(iii) Αν $\lambda = +\infty$ και $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} b_n = +\infty$, τότε $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Απόδ: (i) $\frac{a_n}{b_n} \to \lambda$ και $0 < \lambda < +\infty$. Άρα, από γνωστό θεώρημα για διάταξη ορίων ακολουθιών, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2}, \ \forall n \geq n_0. \text{ Δηλαδή,}$$

$$a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n \text{ και } b_n < \frac{2}{\lambda} a_n, \ \forall n \geq n_0.$$

Το συμπέρασμα (i) (ισοδυναμία) προκύπτει από το Θεώρημα άμεσης σύγκρισης.

(ii) $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow$ (για $\epsilon = 1$), $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{a_n}{b_n} < \epsilon = 1$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n < b_n$, $\forall n \geq n_0$. Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \underset{a_n, b_n > 0}{\Rightarrow} \frac{b_n}{a_n} \to 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (για $\epsilon = 1$)

με $b_n < a_n$, $\forall n \geq n_0$. Άρα, αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = +\infty \xRightarrow{\text{ΚΑΣ}} \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n^3-1}{2n^4+n-2}$. Αν $a_n = \frac{n^3-1}{2n^4+n-2}$ και $b_n = \frac{n^3}{n^4}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^3-1)n^4}{(2n^4+n-2)n^3} = \frac{n^7-n^4}{2n^7+n^4-2n^3} \longrightarrow \frac{1}{2}$

ενώ $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (αρμ. σειρά)

το ΚΟΣ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$

2) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}}$. Θέτουμε $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}} > 0$

και $b_n = \frac{\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[4]{n^{11}}} = \frac{n}{n^{11/4}} = \frac{1}{n^{7/4}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}}{\sqrt[3]{n^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^{11}}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{n^3+2n^2+4}{n^3}} \sqrt[4]{\frac{n^{11}}{1+7n^{11}}} \longrightarrow \sqrt[3]{1}\,\sqrt[4]{1/7} \in (0,+\infty)$

Αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/4}} < +\infty$ $\left(p = 7/4 > 1\right)$ p-σειρά

το ΚΟΣ συνεπάγεται ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < +\infty$.

3) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n}$. Α $a_n = \frac{\cos(1/n)}{n}$, τότε $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

γιατί $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν $b_n = \frac{1}{n}$

τότε $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_n}{b_n} = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \cos(0) = 1$

Επίσης, $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \xRightarrow{\text{ΚΟΣ}} \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$

4) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \sin(1/n^2)$. Α $a_n = \sin(1/n^2)$, τότε $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

αφού $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $b_n = 1/n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \longrightarrow 1$ αφού

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ και $1/n^2 \longrightarrow 0$.

Όμως $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ $(p = 2 > 1,\ \text{p-σειρά}) \xRightarrow{\text{ΚΟΣ}} \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < +\infty$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$. Αν $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$, τότε $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, τότε $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\ln(n)}{n^2} n^{3/2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{γιατί}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{DLH})$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$ (p-σειρά, $p = 3/2 > 1$ συγκλίνει)

$$\xRightarrow{\text{ΚΟΣ}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

<u>Σημείωση</u>: Χωρίς DLH, δείχνουμε ότι $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$ ως εξής:

Θέτουμε $c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, $c_{2^n} = \frac{\ln(2^n)}{\sqrt{2^n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_{2^n} = \frac{n \ln(2)}{(\sqrt{2})^n} \longrightarrow 0$ γιατί $n\theta^n \to 0$ όταν $0 < \theta < 1$

(βασικό όριο). Εδώ, παίρνουμε $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Για να δείξουμε ότι $c_n \to 0$, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι η $(c_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι τελικά φθίνουσα: $c_n > c_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε, $(c_n)_{n \geq n_0}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών (άρα κάτω φραγμένη) $\Rightarrow (c_n)_{n \geq n_0}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό. $\Rightarrow (c_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγμ. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} c_{2^n} = 0$.

Έχουμε ότι $c_n > c_{n+1} \iff \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} > \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \iff$

$$\iff \ln\left[n^{\sqrt{n+1}}\right] > \ln\left[(n+1)^{\sqrt{n}}\right] \overset{\ln\uparrow}{\iff} n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$$

$$\iff n^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} < n^{\sqrt{n+1}} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} < n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < n$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} < n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}} < n$$

Αφού $\sqrt{n^2+n} < 2n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}} < e\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} < e\cdot e^2 = e^3 < 27.$$

Άρα, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}} < n, \quad \forall n \geq 27.$

$$\implies c_n > c_{n+1}, \quad \forall n \geq 27 = n_0$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ

Ένα από τα βασικά όρια ακολουθιών λέει ότι όταν
$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda < 1$, τότε $a_n \longrightarrow 0$. (Κριτήριο λόγου για ακολουθίες)

Θα δούμε τώρα ότι ισχύει ένα ισχυρότερο συμπέρασμα:

Όταν $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό. Κατά συνέπεια, από το κριτήριο απόκλισης, έχουμε ότι $a_n \longrightarrow 0$.

<u>Κριτήριο λόγου για σειρές</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία με $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει με $0 \leq \lambda \leq +\infty$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. (Άρα η $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ συγκλίνει σε πραγμ.)

(ii) Αν $\lambda > 1$ (μπορεί $\lambda = +\infty$), η $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n| = +\infty$ και η $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό. (Μπορεί $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \pm\infty$, ή, $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ να αποκλίνει)

(iii) Αν $\lambda = 1$, το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$. Χρειαζόμαστε άλλο κριτήριο.

<u>Απόδ</u>: (i) Αν $\lambda < \theta < 1$, τότε όπως δείξαμε στο κριτήριο λόγου για ακολουθίες, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a_{n+n_0}| \leq \theta^n |a_{n_0}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $0 < \theta < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \theta^n$ συγκλίνει σε πραγματικό, το κριτήριο σύγκρισης δίνει ότι $\sum\limits_{n\geq 1} |a_{n+n_0}| < +\infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Δηλαδή η σειρά $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα άρα, από το Θ. Cauchy, η $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

(ii) Όταν $\lambda > 1$ και $\lambda > \theta > 1$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+n_0}| > \theta^n |a_{n_0}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \theta^n = +\infty$, γιατί $\theta > 1$, Έχουμε ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_{n+n_0}| = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Επίσης, $\theta^n \to +\infty \Rightarrow |a_{n+n_0}| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow a_n \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ ~~συγκ~~ δεν συγκλίνει σε πραγματικό, από το κριτήριο απόκλισης.

(iii) Π.χ., αν $a_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (Αρμ. Σειρά). Επί, αν $b_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (p-σειρά με $p=2>1$)

<u>Παρατήρηση</u>: 1) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} n^p \theta^n$ συγκλίνει σε πραγματικό όταν $p>0$ και $|\theta|<1$. Πράγματι, αν $\theta=0$ η σειρά μηδενίζεται. Αν $\theta \neq 0$, εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου: $\left|\frac{(n+1)^p \theta^{n+1}}{n^p \theta^n}\right| = \frac{(n+1)^p}{n^p} |\theta| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p |\theta| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\theta| < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} n^p \theta^n$ συγκλίνει σε πραγμ.

2) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$: Αν $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \sqrt{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!][(3n)!]}{(5n)!}$: Αν $a_n = \frac{[(2n)!][(3n)!]}{(5n)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{[(2n+2)!][(3n+3)!]}{(5n+5)!} \frac{(5n)!}{[(2n)!][(3n)!]} = \frac{(2n+1)(2n+2)(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό από το κριτήριο λόγου

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$: $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{1}{e} < 1. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, από Κρ. Λ.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n^n}$: $a_n = \frac{(2n-1)!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n-1)!}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)(2n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)(2n+1)}{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)(2n+1)}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (όπως στο 4))

Άρα $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ και $\frac{(2n)(2n+1)}{n+1} \to +\infty$, έχουμε ότι

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to (+\infty)\cdot(1/e) = +\infty > 1.$ Άρα,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (γιατί $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), από το κριτήριο λόγου.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \theta^n}{n!}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά για όλες τις τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$.

Αν $\theta = 0$, η σειρά μηδενίζεται και συνεπώς συγκλίνει στο 0.

Αν $\theta \neq 0$, θέτουμε $a_n = \dfrac{n^2 \theta^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (θ σταθερό)

Έχουμε ότι $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^2 |\theta|^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{n^2 |\theta|^n} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)n^2} |\theta| = \dfrac{n+1}{n^2}|\theta| \to 0$.

Άρα, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0 < 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 \theta^n}{n!}$ συγκλίνει σε πραγματικό, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

7) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \theta^n$ συγκλίνει απόλυτα, όταν $|\theta| < 1/4$.

Αν $\theta = 0$ η σειρά μηδενίζεται και το συμπέρασμα της άσκησης ισχύει.

Αν $\theta \neq 0$, θέτουμε $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \theta^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (θ σταθερό)

Τότε, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} |\theta|^{n+1} \dfrac{(n!)^2}{[(2n)!]|\theta|^n} = |\theta| \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |\theta| 4 < 1$, αφού $|\theta| < 1/4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \theta^n$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό όταν $|\theta| < 1/4$.

<u>Σημείωση</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \theta^n = +\infty$, όταν $\theta > 1/4$, από το κριτήριο λόγου

8) Οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ και $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Αν $x=0$, η πρώτη σειρά αθροίζει στο 1 αφού

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Αν $x=0$, η δεύτερη σειρά μηδενίζεται.

Θεωρούμε $x \neq 0$ σταθερό και θέτουμε $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ και $b_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου και με τις δύο σειρές:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 < 1, \quad \forall x \neq 0.$$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 < 1, \quad \forall x \neq 0$$

Συνεπώς, από το κριτήριο λόγου, και οι δύο σειρές συγκλίνουν απόλυτα. Άρα, και οι δύο σειρές, συγκλίνουν σε πραγματικούς, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Σημείωση</u>: Ορίζουμε $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ και $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Σημείωση</u>: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα, $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Η απόλυτη σύγκλιση αυτής της σειράς προκύπτει εύκολα και από το κριτήριο λόγου.

<u>2ο Κριτήριο Απόκλισης</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών

(i) Υποθέτουμε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ αποκλίνει.

(ii) Υποθέτουμε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα με $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ αποκλίνει.

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, η σειρά $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$ αποκλίνει (δεν συγκλίνει ούτε σε πραγματικό, ούτε στα $\pm\infty$).

<u>Απόδ</u>: (i) Αφού $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty} \uparrow$, έπεται ότι είτε $a_n \to +\infty$, είτε $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \geq a_1 > 0$. Σε κάθε περίπτωση $a_n \not\to 0$ και άρα $(-1)^{n-1}a_n \not\to 0$ αφού $|(-1)^{n-1}a_n| = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από το 1ο κριτήριο απόκλισης συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n-1}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Μένει να δείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ δεν συγκλίνει στα $\pm\infty$. Πράγματι, θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k = (-a_2 + a_1) + (-a_4 + a_3) + \cdots$

$+ \cdots + (-a_{2n} + a_{2n-1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k}) \leq 0$, αφού $a_{2k-1} \leq a_{2k}$, $\forall k = 1, \ldots, n$ διότι $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ αύξουσα. Άρα, $S_{2n} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συμπεραίνουμε ότι $S_{2n} \not\to +\infty$, άρα και $S_n \not\to +\infty$.

Επίσης, $S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{2k+1} - a_{2k}) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(π.χ., $\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + (a_7 - a_6)$)

γιατί $a_{2k+1} \geq a_{2k}$, $\forall k=1,\dots,n$ αφού $(a_n)_{n\geq1}$ αύξουσα.

Άρα, $S_{2n-1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $S_{2n-1} \not\to -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n \not\to -\infty$. Καταλήξαμε στο ότι $S_n \not\to \pm\infty$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ δεν συγκλίνει ούτε σε πραγμ. αριθμό, ούτε στο $\pm\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ αποκλίνει.

(iii) Η $(a_n)_{n\geq1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών. Άρα η $(a_n)_{n\geq1}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Συνεπώς υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ και μάλιστα $\lambda \geq 0$ αφού $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda > 0$. Άρα, $a_n \not\to 0 \Rightarrow |(-1)^{n-1} a_n| \not\to 0 \Rightarrow$ $(-1)^{n-1} a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό λόγω του 1ου κριτηρίου απόκλισης. Μένει να δείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ δεν συγκλίνει στο $\pm\infty$. Θεωρούμε την ακολουθία $(S_n)_{n\geq1}$ των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Έχουμε ότι

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$ αφού $(a_n)_{n\geq1}$ φθίνουσα

και άρα $a_{2k-1} \geq a_{2k}$, $\forall k=1,\dots,n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$S_{2n} \not\to -\infty \Rightarrow S_n \not\to -\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ δεν συγκλίνει στο $-\infty$.

Από την άλλη πλευρά, έχουμε ότι $S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{2k+1}-a_{2k})$

και $a_{2k+1}-a_{2k} \le 0$, $\forall k=1,\dots,n-1$ διότι $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}$ φθίνουσα.

Άρα, $S_{2n-1} \le a_1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή η $(S_{2n-1})_{n\ge1}^{\infty}$ είναι άνω φραγμένη

$\Rightarrow S_{2n-1} \not\to +\infty \Rightarrow S_n \not\to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ δεν

συγκλίνει στο $+\infty$. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ δεν συγκλίνει ούτε

σε πραγμ. αριθμό, ούτε στο $\pm\infty$. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ αποκλίνει.

<u>Άσκηση</u>: Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: Αν $x=0$, η σειρά μηδενίζεται. Άρα συγκλίνει στο 0.

Αν $x\neq 0$, θέτουμε $a_n=\frac{x^n}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. (x = σταθερό)

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\,\frac{n^2}{|x|^n} = |x|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x|\cdot 1 = |x|$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $|x|<1$. Τότε από κριτ. λόγου, έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό.

(ii) $|x|>1$. Πάλι από το κρ. λόγου, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό. Αν $x>1$, τότε $\frac{x^n}{n^2}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και συνεπώς, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = +\infty$.

Αν $x<-1$, τότε $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = x\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{|x|^{n-1}}{n^2}$

Σταθεροποιούμε $x<-1$ και θέτουμε $b_n = \frac{|x|^{n-1}}{n^2}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι $b_n<b_{n+1}$ όταν n είναι αρκετά μεγάλο.

Πράγματι, $b_n<b_{n+1} \iff \frac{|x|^{n-1}}{n^2} < \frac{|x|^{n}}{(n+1)^2} \iff \frac{(n+1)^2}{n^2} < |x|$.

Αφού $\frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1 < |x|$, γνωρίζουμε από τη θεωρία των ορίων (το σχετικό με τη διάταξη), ότι $\frac{(n+1)^2}{n^2}<|x|$, $\forall n\geq n_0$, όπου $n_0\in\mathbb{N}$ κατάλληλα μεγάλος φυσικός. Άρα, $b_n<b_{n+1}$, $\forall n\geq n_0$.

Εφαρμόζοντας το 2ο κριτ. απόκλισης (το (i)), συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq n_0}^{\infty} b_n(-1)^{n-1}$ αποκλίνει. Άρα και η $\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{|x|^{n-1}}{n^2}$ αποκλίνει. Άρα, αφού $x\neq 0$, και η $x\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{|x|^{n-1}}{n^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ αποκλίνει.

(iii) $|x|=1$, δηλαδή $x=\pm 1$. Τότε το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς. Όταν όμως $x=1$, η σειρά γίνεται: $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$, ως p-σειρά με $p=2>1$.

Όταν $x=-1$, η $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (p-σειρά, $p=2>1$). Άρα, $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει σε πραγματικό. Συμπερασματικά, η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε πραγματικό $\iff |x| \leq 1$.

Επί $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = +\infty$, αν $x>1$, και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ αποκλίνει όταν

$x < -1$.

<u>Κριτήριο Ρίζας για σειρές</u>: Είναι ανάλογο του κριτηρίου λόγου μόνο που χρησιμοποιεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ αντί του $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

<u>Κριτήριο Ρίζας</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ με $0 \leq \lambda \leq +\infty$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. (Άρα η $\sum_{n\geq 1} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό).

(ii) Αν $\lambda > 1$, τότε $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (Μπορεί να συγκλίνει στο $\pm\infty$, ή, μπορεί να αποκλίνει). Η περίπτωση $\lambda = +\infty$ περιλαμβάνεται στην $\lambda > 1$.

(iii) Αν $\lambda = 1$, το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα. (Άρα πρέπει να πάμε σε άλλο κριτήριο).

<u>Απόδ.</u>: (i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda < 1$. Αν $\lambda < \theta < 1$, τότε $\sqrt[n]{|a_n|} < \theta$, $\forall n \geq n_0$. Άρα $|a_n| < \theta^n$, $\forall n \geq n_0$. Αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \theta^n = \frac{\theta}{1-\theta}$ (γεωμ. σειρά) το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης. Ανάλογα και το (ii).

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} e^{-n^2}$: $|a_n| = e^{-n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left(e^{-n^2}\right)^{1/n} = e^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0$, από τα βασικά όρια, αφού $0 < 1/e < 1$.

Αφού $0<1$, το κριτήριο ρίζας μας δίνει ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} e^{-n^2} < +\infty$.

2) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$: $a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} =$

$= \sqrt[n]{n} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 1 - 1 = 0 < 1$ ($\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, από τα βασικά όρια). Από το κρ. ρίζας $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n < +\infty$.

3) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right]^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} =$

$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$. Άρα, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

από το κριτήριο ρίζας.

4) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^n}$: $a_n = \frac{e^{n^2}}{n^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{e^{n^2}}}{\sqrt[n]{n^n}} =$

$= \frac{\left(e^{n^2}\right)^{1/n}}{n} = \frac{e^{n^2/n}}{n} = \frac{e^n}{n} = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε ότι $\frac{1}{b_n} = \frac{n}{e^n} = n\left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0$ αφού $n^p \theta^n \longrightarrow 0$ όταν $p > 0$ και $|\theta| < 1$ (κρ. όρια για ακολουθίες). Άρα, $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{b_n} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow b_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow +\infty > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$

Κριτήρια Raabe - Duhamel

Όταν $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $\frac{a_{n+1}}{a_n}\longrightarrow 1$, το κριτήριο λόγου δεν αποφαίνεται. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να δώσει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς το κριτήριο των Raabe και Duhamel.

Κριτήριο Raabe: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία θετικών πραγματικών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0>1$, ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1-\frac{1}{n}$, $\forall n\geq n_0$.

Τότε $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n=+\infty$

Απόδ: Εφαρμόζουμε την ανισότητα $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$, διαδοχικά για

$n=n_0, n_0+1, n_0+2, \dots$: $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\geq\frac{n_0-1}{n_0}$ και $\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\geq\frac{n_0}{n_0+1}$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε: $a_{n_0+2}\geq a_{n_0}\cdot\frac{n_0-1}{n_0+1}$.

Επίσης, $a_{n_0+3}>a_{n_0+2}\,\frac{n_0+1}{n_0+2}$. Άρα, $a_{n_0+3}\geq a_{n_0}\,\frac{n_0-1}{n_0+2}$.

Συνεχίζοντας, επαγωγικά, βρίσκουμε: $a_{n_0+n}\geq a_{n_0}\,\frac{n_0-1}{n_0+n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Longrightarrow\ a_n\geq a_{n_0}\,\frac{n_0-1}{n-1}$, $\forall n\geq n_0$.

Όμως, $\sum_{n\geq n_0}^{\infty}\frac{1}{n-1}=+\infty$, αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ (αρμονική σειρά)

Αφού $a_{n_0}(n_0-1)>0$, το κριτήριο σύγκρισης δίνει $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n=+\infty$

Κριτήριο Duhamel: Αν $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και υπάρχει $c > 1$, $c \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{c}{n}, \quad \forall n \geq n_0 \quad (\text{για κάποιο } n_0 \in \mathbb{N})$$

τότε $\sum\limits_{n \geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

Απόδ: Η ανισότητα της υπόθεσης γράφεται $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n-c}{n}$, $\forall n \geq n_0$ (αναγκαία, $n > c \Rightarrow n_0 > c$). Άρα, $n a_{n+1} \leq n a_n - c a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow c a_n \leq n a_n - n a_{n+1} \Rightarrow (c-1) a_n \leq (n-1) a_n - n a_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$

Θέτουμε $b_n = (n-1) a_n$, $\forall n \geq n_0$. Τότε, $(c-1) a_n \leq b_n - b_{n+1}$, $\forall n \geq n_0$

Αφού $c > 1$, έχουμε ότι $(c-1) a_n > 0 \Rightarrow b_n - b_{n+1} > 0$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (b_n)_{n \geq n_0}^{\infty}$ είναι γν. φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών (αφού $a_n > 0$). Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lambda \in [0, +\infty)$.

Αφού $c > 1$, έχουμε ότι $a_n \leq \frac{1}{c-1}(b_n - b_{n+1})$ $\forall n \geq n_0$ (και η σειρά

$$\sum_{n \geq n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_{n_0} - \lim_{n \to \infty} b_n = b_{n_0} - \lambda \quad (\text{τηλεσκοπική σειρά})$$

$\Rightarrow \frac{1}{c-1} \sum\limits_{n \geq n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ συγκλίνει σε πραγματικό. (τον $\frac{b_{n_0} - \lambda}{c-1}$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n \geq n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης

Κριτήριο Raabe + Duhamel: Έστω $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = c > 1$. Τότε η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό.

(ii) Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = c < 1$. Τότε

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Σημείωση: Αν $\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = 1$, τότε το κριτήριο Raabe-Duhamel δεν δίνει κάποιο συμπέρασμα για τη σύγκλιση της $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$.

Απόδ: (i) Επιλέγουμε $c > \vartheta > 1$. Από ιδιότητα ορίου - διάταξης βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \vartheta$, $\forall n \geq n_0$

Άρα, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\vartheta}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\vartheta}{n}$, $\forall n \geq n_0$, και $\vartheta > 1$

Το κριτήριο Duhamel δίνει ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < +\infty$

(ii) Επιλέγουμε $c < \vartheta < 1$. Πάλι από τις ιδιότητες ορίου-διάταξης βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \vartheta$, $\forall n \geq n_0$

Άρα, $1-\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{\theta}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{\theta<1}{>}1-\frac{\theta}{n}>1-\frac{1}{n}$, $\forall n\geq n_0$

Από κριτήριο Raabe έχουμε ότι $\sum_{n\geq 1} a_n=+\infty$

<u>Παράδειγμα</u>. 1) $a_n=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}{4\cdot 8\cdot 12\cdots(4n)}\,\frac{1}{n+5}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $a_1=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{1+5}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$, $a_2=\frac{2\cdot 6}{4\cdot 8}\,\frac{1}{2+5}=\frac{12}{32}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{56}$

$a_3=\frac{2\cdot 6\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12}\,\frac{1}{3+5}=\frac{5}{128}$, $a_4=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\,\frac{1}{4+5}=\frac{35}{1152}$

Έχουμε ότι $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot 6\cdots(4n-2)(4n+2)}{4\cdot 8\cdots(4n)(4n+4)}\,\frac{1}{(n+6)}\,\frac{4\cdot 8\cdots(4n)(n+5)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(4n+2)(n+5)}{(4n+4)(n+6)}=\frac{4n^2+20n+2n+10}{4n^2+24n+4n+24}=\frac{4n^2+22n+10}{4n^2+28n+24}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n^2+11n+5}{2n^2+14n+12}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}\longrightarrow 1$.

Άρα το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα. Δοκιμάζουμε το κριτήριο Raabe-Duhamel: $n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]=n\left[1-\frac{2n^2+11n+5}{2n^2+14n+12}\right]=$

$=n\,\frac{2n^2+14n+12-2n^2-11n-5}{2n^2+14n+12}=n\,\frac{3n+7}{2n^2+14n+12}=\frac{3n^2+7n}{2n^2+14n+12}$

$\Rightarrow n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]\longrightarrow\frac{3}{2}>1$. Άρα, η σειρά

$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

2) Αν $a \neq 0$ και $a \notin \mathbb{N}$, ορίζουμε $x_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}(-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Εξετάστε τη σειρά $\sum_{n \geq 1}^{\infty} x_n$ ως προς τη σύγκλιση

Λύση: Αφού $a \neq 0$ και $a \neq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Σχηματίζουμε το λόγο $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!} \frac{(n!)(-1)}{a(a-1)\cdots(a-n+1)}$

$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = (-1)\frac{a-n}{n+1} = \frac{n-a}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 0$, $\forall n > a$. Δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n=[a]+1}^{\infty}$ αποτελείται από ομόσημους αριθμούς. Επίσης έχουμε ότι

$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{n-a}{n+1} \longrightarrow 1$. Άρα το κριτήριο λόγου δεν αποφαίνεται.

Για το κριτήριο Raabe-Duhamel έχουμε: $n\left[1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right] =$

$= n\left[1 - \frac{n-a}{n+1}\right] = n\frac{n+1-(n-a)}{n+1} = n\frac{a+1}{n+1} \longrightarrow a+1$.

Αφού $a \neq 0$, έχουμε ότι $a+1 \neq 1$. Συνεπώς το κριτήριο δίνει συμπέρασμα: Αν $a+1 > 1$, δηλαδή αν $a > 0$, η $\sum_{n \geq 1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει σε πραγματικό. Αν $a+1 < 1$, δηλαδή αν $a < 0$, τότε είτε $\sum_{n \geq 1}^{\infty} x_n = +\infty$, είτε $\sum_{n \geq 1}^{\infty} x_n = -\infty$ αφού οι $(x_n)_{n \geq [a]+1}^{\infty}$ είναι ομόσημοι. Όμως $a < 0$, άρα όλοι οι $(x_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι ομόσημοι και $x_1 = -a > 0$. Άρα $\sum_{n \geq 1} x_n = +\infty$, αν $a < 0$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$. Γνωρίζουμε ήδη, από παλαιότερη άσκηση με το κριτήριο ορικής σύγκρισης, ότι αυτή η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Για $n \geq 2$, έχουμε ότι αν $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$, τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \frac{n^2}{\ln(n)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \left[\frac{n}{(n+1)}\right]^2, \ \forall n \geq 2.$$

Έχουμε ότι $\frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$ και ότι $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \longrightarrow 1$.

Πράγματι, $\left| \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \right| = \left| \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)} \right| = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)} =$

$\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$, $\forall n \geq 2$. Αφού $\ln(n) \longrightarrow +\infty$ και

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \ln(1+0) = \ln(1) = 0$, έχουμε ότι $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \longrightarrow 1$

Άρα, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 1$, $a_n > 0, \forall n \geq 2$ και το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα. Με το κριτήριο Raabe-Duhamel

έχουμε: $n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = n\left[1 - \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \frac{n^2}{\ln(n)}\right] =$

$$= n \frac{(n+1)^2 \ln(n) - n^2 \ln(n+1)}{(n+1)^2 \ln(n)} = n \frac{\ln\left[n^{(n+1)^2}\right] - \ln\left[(n+1)^{n^2}\right]}{(n+1)^2 \ln(n)} =$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \ln\left[\frac{n^{(n+1)^2}}{(n+1)^{n^2}}\right] = \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \ln\left[\frac{n^{n^2+2n+1}}{(n+1)^{n^2}}\right] =$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \ln\left[\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \cdot n^{2n+1}\right] =$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \left[\ln\left[\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}\right] + \ln\left(n^{2n+1}\right) \right] =$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \ln\left\{\left[\frac{n^n}{(n+1)^n}\right]^n\right\} + \frac{n}{(n+1)^2 \ln(n)} \cdot (2n+1) \ln(n) =$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2 \ln(n)} \cdot \ln\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] + \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln(n)} \ln\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] + \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Έχουμε ότι $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$, $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$ και $\ln\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] \to \ln(1/e) = -1$

Άρα, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln(n)} \ln\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] \longrightarrow 1 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$

Ενώ, $\frac{2n^2+2n}{n^2+2n+1} \longrightarrow 2$. Συνεπώς, $n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] \to 2 > 1$

και η $\sum_{n \geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, από το κριτήριο Raabe-Duhamel.

4) Αν $0<\theta<1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{\sqrt{n}}$ συγκλίνει σε πραγματικό.

Θέτουμε $a_n = \theta^{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\theta^{\sqrt{n+1}}}{\theta^{\sqrt{n}}} = \theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0$

αφού $0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \overset{\text{Sand.}}{\Longrightarrow} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0$

Έπεται ότι $\cancel{\theta^{\sqrt{n+1}} - \theta^{\sqrt{n}} \to}$ $\theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \to \theta^0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ και το κριτήριο λόγου δεν αποφαίνεται.

Με το Raabe-Duhamel: $n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = n\left[1 - \theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right] =$

$= -n\left[\theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right] = -n \frac{\theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \to \ln(a)$, $\forall a>0$, $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ με $x_n \to +\infty$. Άρα, $-\frac{\theta^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \to -\ln(\theta) = \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) > 0$

αφού $0<\theta<1$. Επίσης, $n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = n\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{n}{2\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \to (+\infty) - 0 = +\infty$

Συνεπώς, $n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] \to \ln\left(\frac{1}{\theta}\right)(+\infty) = +\infty > 1$.

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{\sqrt{n}} < +\infty$, από το κριτήριο Raabe-Duhamel.

Εναλλάσσουσες Σειρές – Κριτήριο Leibniz

Αν $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad , \text{ ή, } \quad \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$$

λέγεται εναλλάσσουσα επειδή κάθε ζευγάρι διαδοχικών όρων της είναι ετερόσημοι. Π.χ. η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ και η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2$ είναι εναλλάσσουσες. Η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi)$ <u>δεν</u> είναι εναλλάσσουσα γιατί $\cos(n\pi) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} 1$.

Για τις εναλλάσσουσες σειρές ισχύει το παρακάτω κριτήριο:

<u>Κριτήριο Leibniz</u>: Έστω $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες: (i) $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ φθίνουσα. και
(ii) $a_n \to 0$. Τότε, η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

<u>Παρατήρηση</u>: Το ίδιο κριτήριο ισχύει και με εναλλάσσουσες σειρές της μορφής $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n a_n$ με $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, αφού

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n a_n = -\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

Απόδ (Leibniz). Σχηματίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της σειράς $\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Τότε

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι: 1) $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{(a_{2k-1}-a_{2k})}_{\geq 0 \text{ γιατί } (a_n)_{n\geq1}^{\infty}\downarrow} \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1}(a_{2k-1}-a_{2k}) = S_{2n+2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$ Δηλαδή

η $(S_{2n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

2) $S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(a_{2k+1}-a_{2k})}_{\leq 0 \text{, γιατί } (a_n)_{n\geq1}^{\infty}\downarrow} \geq$

$$\geq a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1}-a_{2k}) = S_{2n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Δηλαδή, $S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{(a_{2n+1}-a_{2n})}_{\leq 0} \leq S_{2n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $(S_{2n-1})_{n\geq1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα.

3) $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \leq S_{2n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (αφού $a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$)

Συμπεραίνουμε ότι οι υπακολουθίες $(S_{2n})_{n\geq1}^{\infty}$ και $(S_{2n-1})_{n\geq1}^{\infty}$ της $(S_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι μονότονες και φραγμένες. Η $(S_{2n})_{n\geq1}^{\infty}\uparrow$ και

$S_{2n} \le S_{2n-1} \le S_1 = a_1$, λόγω της 3). $\Rightarrow (S_{2n})_{n\ge1}$ άνω φραγμένη

Επί, $S_{2n-1} \ge S_{2n} \ge S_2 = a_1 - a_2$, πάλι λόγω (3) $\Rightarrow (S_{2n-1})_{n\ge1}$ είναι κάτω φραγμένη. Από το Αξίωμα Πληρότητας έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = A \in \mathbb{R}$ και $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = B \in \mathbb{R}$.

Τέλος, έχουμε ότι $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n} \to 0$ αφού $a_n \to 0$

$\Rightarrow A - B = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n-1}) = 0 \Rightarrow A = B$.

Άρα, $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = A \in \mathbb{R} \Rightarrow S_n \to A$, από πεπερασμένη άσκηση. Άρα, $\sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = A \in \mathbb{R}$.

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $\sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. 2) $\sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

3) $\sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ (αφού $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} > \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \to 0$.). 4) $\sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n}$ Έχουμε ότι

$\frac{\ln(n)}{n} \ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\frac{\ln(n)}{n} = \ln[n^{1/n}] \to \ln(1) = 0$, αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$

(βασικό όριο). Επίσης, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln(n)}{n} \Leftrightarrow \ln[(n+1)^n] < \ln[n^{n+1}]$

$\Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^n \cdot n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$.

Όμως, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln(n)}{n}$, $\forall n \ge 3$.

Από κριτήριο Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό.

$\Rightarrow \sum_{n\ge1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό.