<u>Κριτήριο Pringsheim</u>: Έστω $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}$ <u>φθίνουσα</u> ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}$. Αν $n a_n \not\to 0$, τότε $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = +\infty$

<u>Απόδ</u>: Εφόσον $a_n \ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ θα έχουμε ότι είτε $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = \lambda\in\mathbb{R}$, είτε $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = +\infty$. Έστω ότι $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = \lambda\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε το n-οστό μερ. άθροισμα $S_n = \sum_{k\ge1}^{n} a_k$ της σειράς $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Γνωρίζουμε ότι $S_n \to \lambda$, άρα και $S_{2n}\to\lambda$.

Συνεπώς, $\boxed{S_{2n}-S_n} \longrightarrow \boxed{\lambda-\lambda=0}$. Όμως,

$$S_{2n}-S_n = \sum_{k\ge1}^{2n} a_k - \sum_{k\ge1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}$$

Επειδή, από υπόθεση, $(a_n)_{n\ge1}^{\infty}\downarrow$, έχουμε ότι:

$$a_{n+1}\ge a_{n+2}\ge \dots \ge a_{n+n} = a_{2n}. \quad \text{Άρα,}$$

$$\sum_{k\ge n+1}^{2n} a_k \ge \sum_{k\ge n+1}^{2n} a_{2n} = a_{2n}(2n-n-1+1) = n a_{2n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Άρα, $0 \le n a_{2n} \le S_{2n}-S_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $S_{2n}-S_n\to 0$

έχουμε από Κ. Sandwich ότι $n a_{2n}\to 0 \Rightarrow \boxed{2n a_{2n}\to 0}$

Επίσης, $\sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = \lambda\in\mathbb{R} \Longrightarrow a_n\to 0$, από κριτήριο απόκλισης

Άρα και $a_{2n+1}\to 0$. Συνεπώς, $(2n+1)a_{2n+1} = 2n a_{2n+1} + a_{2n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le (2n+1)a_{2n+1} \overset{(a_{2n+1}\le a_{2n})}{\le} 2n a_{2n} + a_{2n+1} \to 0$, αφού $a_{2n+1}\to 0$ και $n a_{2n}\to 0$

$\overset{Sand}{\Rightarrow} \boxed{(2n+1)a_{2n+1}\to 0.}$ Άρα, $2n a_{2n}\to 0$ και $(2n+1)a_{2n+1}\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n a_n \to 0$ Άτοπο. $\Rightarrow \sum_{n\ge1}^{\infty} a_n = +\infty$

Εφαρμογή: $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, αφού $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty} \downarrow$ και $n\frac{1}{n} = 1 \to 1 \neq 0$.

Προσοχή: Το αντίστροφο του κριτηρίου Pringsheim δεν ισχύει εν γένει. Δηλαδή είναι δυνατό για μία σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$, ενώ $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty} \downarrow$, και $n a_n \to 0$. Π.χ. η σειρά

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\overbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}^{16\ \text{προσθετέοι}}\right) + \cdots$$

έχει άπειρο άθροισμα γιατί κυριαρχεί την αρμονική σειρά ενώ ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Pringsheim.

Κριτήριο Συμπύκνωσης Cauchy: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n\geq 1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$

Απόδ: "$\Rightarrow$", Παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} 2a_2 &= a_2 + a_2 \leq a_1 + a_2 \leq 2(a_1+a_2) \\ 4a_4 &= 2(2a_4) = 2(a_4+a_4) \leq 2(a_3+a_4) \\ 8a_8 &= 2(4a_8) = 2(a_8+a_8+a_8+a_8) \leq 2(a_5+a_6+a_7+a_8) \end{aligned}\right\} \text{γιατί } (a_n)_{n\geq 1}^{\infty} \text{ φθίνουσα}$$

Δηλαδή, $2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \leq 2(a_1+a_2) + 2(a_3+a_4) + 2(a_5+a_6+a_7+a_8) =$

$$= 2\sum_{k\geq 1}^{8} a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1}^{3} 2^k a_{2^k} \leq 2\sum_{k\geq 1}^{2^3} a_k$$

Ανάλογα εργαζόμενοι μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \le 2\sum_{k=1}^{2^n} a_k \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \exists\, C>0$ με $\sum_{k=1}^{n} a_k \le C \, , \, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} a_k \le C \, , \, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \le C \, , \, \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$\overset{a_n\ge 0}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

«$\Longleftarrow$» Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\left.\begin{aligned} a_3+a_4 &\le a_2+a_2 = 2a_2 \\ a_5+a_6+a_7+a_8 &\le a_4+a_4+a_4+a_4 = 4a_4 \\ a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16} &\le 8a_8 \end{aligned}\right\} \text{ αφού } (a_n)_{n\ge1}\downarrow$$

Άρα, $\sum_{k=3}^{16} a_k \le 2a_2+4a_4+8a_8 = \sum_{k=1}^{3} 2^k a_{2^k}.$

Επαγωγικά, παίρνουμε ότι $\sum_{k=3}^{2^n} a_k \le \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k} \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2.$

Όμως, $\exists\, C>0$ με $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \le C$, $\forall n\in\mathbb{N}$, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{2^n} a_k \le C \, , \, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=3}^{n} a_k \le \sum_{k=3}^{2^n} a_k \le C \, , \, \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

Σημείωση: Το κριτήριο συμπύκνωσης θα μας βοηθήσει να δείξουμε ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \iff p>1$.

Απόλυτη Σύγκλιση Σειράς

Ορισμός: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, όταν η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Όταν δηλαδή $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ ($|a_n| \geq 0$ πάντα).

Παραδείγματα: 1) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ συγκλίνει απόλυτα αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αυτό δεν σημαίνει ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1$, αφού οι σειρές $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι διαφορετικές.

2) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1$.

Παρατηρούμε ότι, αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, για $x=-1$, συνεπώς $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$.

3) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n$ δεν συγκλίνει απόλυτα αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |(-1)^n| = \sum_{n\geq 1}^{\infty} 1 = +\infty$

<u>Θεώρημα (Cauchy)</u>: Αν η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Δηλαδή, αν $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, τότε, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης ισχύει ότι $|\lambda| = \left|\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n|$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Το αντίστροφο του Θ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει. Μπορεί η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Θα δούμε ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$, ενώ, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$,

όπως ήδη γνωρίζουμε για την αρμονική σειρά.

<u>Απόδ</u> (Θεωρ. Cauchy). Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο σύγκλισης Cauchy. Θα δείξουμε δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\sum_{k\geq n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon, \quad \forall\, m > n \geq n_0.$$

Αφού $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, το κρ. Cauchy μας λέει, δοθέντος $\epsilon > 0$, κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{k\geq n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$, $\forall\, m > n \geq n_0$.

Το συμπέρασμα έπεται λόγω της τριγωνικής ανισότητας:

$$\left|\sum_{k\geq n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k\geq n+1}^{m} |a_k| < \epsilon, \quad \forall\, m > n \geq n_0.$$

Επιπλέον, λόγω της τριγ. ανισ., έχουμε ότι:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Αφήνοντας $n\to+\infty$, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |a_k|$, λαμβάνουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |a_k| \Rightarrow$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Ειδικές Σειρές

Στην πλειονότητα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι γενικά δύσκολο να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Π.χ, θα δούμε ότι ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, ευτυχώς η ~~ακριβή~~ ακριβής τιμή του $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, δεν μπορεί να βρεθεί με τις γνωστές μεθόδους. Επίσης, κανείς δεν γνωρίζει την ακριβή τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, ενώ θα δούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$.

Υπάρχουν δύο βασικά είδη σειρών για τα οποία θα μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίζουμε τα αθροίσματά τους:
Η γεωμετρική σειρά και η τηλεσκοπική σειρά

Γεωμετρική Σειρά: Αν $\vartheta \in \mathbb{R}$, τότε η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \vartheta^n$ λέγεται γεωμετρική σειρά. Π.χ. η γνωστή σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, είναι γεωμετρική με λόγο $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Θεώρημα: Για τη γεωμετρική σειρά ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αν $|\vartheta|<1$, τότε $\sum_{n\geq 1} \vartheta^n = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$.

(2) Αν $\vartheta \geq 1$, τότε $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \vartheta^n = +\infty$

(3) Αν $\vartheta \leq -1$, τότε η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \vartheta^n$ αποκλίνει

Απόδ: (1) Έστω ότι $|\vartheta|<1$. Υπολογίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \vartheta^n$. Έχουμε:

$$S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} \vartheta^k = \vartheta \sum_{k\geq 1}^{n} \vartheta^{k-1} = \vartheta(1+\vartheta+\cdots+\vartheta^{n-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \vartheta \frac{\vartheta^n - 1}{\vartheta - 1} = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}(1-\vartheta^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $|\vartheta|<1$, το βασικό όριο 5 μας δίνει ότι $\vartheta^n \to 0$

και συνεπώς $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\theta}{1-\theta}(1-0) = \frac{\theta}{1-\theta} \in \mathbb{R}$.

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n = \frac{\theta}{1-\theta}$, αν $|\theta|<1$. Δηλαδή η γεωμ. σειρά συγκλίνει στο $\frac{\theta}{1-\theta}$ όταν $|\theta|<1$.

(2) Αν $\theta \geq 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ είναι σειρά θετικών αριθμών.

Άρα, είτε $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n < +\infty$, είτε, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n = +\infty$.

Όμως, $\sum_{k=1}^{n} \theta^k \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού $\theta \geq 1$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \theta^k = +\infty$ γιατί $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

(3) Αν $\theta \leq -1$, όπως στο (1), υπολογίζουμε το n-οστό μερικό άθροισμα S_n της $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$. Έχουμε ότι:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \theta^k = \theta \sum_{k=1}^{n} \theta^{k-1} = \theta(1+\theta+\dots+\theta^{n-1}) = \theta \frac{\theta^n - 1}{\theta - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

~~Άρα,~~ $\cancel{S_{2n} = \frac{\theta}{\theta-1}(\theta^{2n}-1) \to +\infty}$, ~~αφού~~ $\cancel{\frac{\theta}{\theta-1}}$

Αν $\theta = -1$, έχουμε $S_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^n - 1\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Όταν $\theta<-1$, $S_{2n}=\frac{\theta}{\theta-1}\left(\theta^{2n}-1\right)\to+\infty$ αφού

$\frac{\theta}{\theta-1}>0$ και $\theta^2>1$ $\quad \left(\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^n\to 0 \Rightarrow \theta^{2n}\to+\infty\right)$

Επίσης, $S_{2n-1}=\frac{\theta}{\theta-1}\left(\theta^{2n-1}-1\right)=\frac{\theta}{\theta-1}\left[(-|\theta|)^{2n-1}-1\right]=$

$$=\frac{\theta}{\theta-1}\left[(-1)^{2n-1}|\theta|^{2n-1}-1\right]=\frac{\theta}{\theta-1}\left[-|\theta|^{2n-1}-1\right]\longrightarrow-\infty.$$

Άρα, $S_{2n}\to+\infty$ και $S_{2n-1}\to-\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\theta^n$ αποκλίνει.

<u>Ασκήσεις</u>: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n=\frac{-3/4}{1+3/4}=\frac{-3}{7}$.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{5n-3}}{3^{4n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-3}\,2^{5n}}{3^{-1}\,3^{4n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8}\left(\frac{2^5}{3^4}\right)^n=$$

$$=\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{32}{81}\right)^n=\frac{3}{8}\,\frac{32/81}{1-\frac{32}{81}}=\frac{3}{8}\,\frac{32}{49}=\frac{12}{49}$$

3) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2+n!)}{3^n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

γιατί συγκλίνει απόλυτα: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(n^2+n!)}{3^n}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$

Μία σημαντική εφαρμογή της γεωμετρικής σειράς είναι η ύπαρξη δεκαδικού αναπτύγματος για κάθε πραγματικό αριθμό.

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακεραίων αριθμών στο $\{0,1,\dots,8,9\}$ τέτοια ώστε:

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$, όπου $[x]$ = ακέραιο μέρος του x.

Γράφουμε τότε ότι $x = [x], a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} \cdots$

Οι ακέραιοι $a_1, a_2, a_3, \dots, \dots$ λέγονται τα δεκαδικά ψηφία του x.

Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μοναδική εκτός κι αν ο x είναι δεκαδικός αριθμός: $x = \pm \frac{m}{10^n}$ για κάποιους m και n στο $\mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, ο x έχει ένα <u>τερματιζόμενο</u> δεκαδικό ανάπτυγμα: $x = [x] + \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{10^n}$, για κάποιο $p \in \mathbb{N}$. Δηλαδή,

$$a_n = 0, \ \forall n > p, \quad a_n \in \{0,1,\dots,9\}, \ \forall n \leq p.$$

Κάθε πραγματικός αριθμός $x \neq 0$, έχει ένα μοναδικό <u>μή τερματιζόμενο</u> δεκαδικό ανάπτυγμα: $x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$; με

$a_n \in \{0,1,\dots,9\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, και το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ να είναι άπειρο.

Για την απόδειξη του θεωρήματος για τα δεκαδικά αναπτύγματα πραγματικών αριθμών χρειαζόμαστε δύο απλές παρατηρήσεις:

<u>Παρατήρηση 1</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών με $a_n \geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n = 0$. Τότε, $a_n = 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $m\in\mathbb{N}$ τυχόν. Αφού $a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$0 \leq a_m \leq \sum_{k\geq 1}^{n} a_k = s_n, \quad \forall n\geq m. \text{ Άρα, } 0\leq a_m \leq \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = 0$$

$\Longrightarrow a_m = 0, \quad \forall m\in\mathbb{N}$.

<u>Παρατήρηση 2</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών με $a_n \leq b_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Αν οι σειρές $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό, δηλ., $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} b_n = \lambda \in\mathbb{R}$, τότε $a_n = b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, θέτουμε $\gamma_n = b_n - a_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $\gamma_n \geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, και

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n - \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lambda - \lambda = 0, \text{ από την υπόθεση.}$$

Από την Παρατήρηση 1, έχουμε ότι $\gamma_n = b_n - a_n = 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος δεκαδ. αναπτ.</u>: Αρκεί να δείξουμε το θεώρημα όταν $0 \leq x < 1$, όταν δηλαδή $[x] = 0$. Στη γενική περίπτωση έχουμε ότι $x = [x] + (x - [x]) = [x] + y$, με $y = x - [x] \in [0,1)$, άρα $[y] = 0$. Αν $y = \sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $a_n \in \{0,1,\dots,9\}$, τότε $x = [x] + \sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 \leq x < 1$. $\Rightarrow$ $0 \leq 10x < 10$.

ακέρ. μέρ.

Θέτουμε $a_1 = [10x]$. Τότε, $a_1 \in \{0,1,\dots,9\}$ και

$a_1 \leq 10x < a_1 + 1$, από τον ορισμό του ακέραιου μέρους.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{10} \leq x < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10}.$$

ακέρ. μέρος

Θέτουμε $a_2 = \left[10^2\left(x - \frac{a_1}{10}\right)\right]$. Αφού $0 \leq 10^2\left(x - \frac{a_1}{10}\right) < 10$

έχουμε ότι $a_2 \in \{0,1,\dots,9\}$ και

$$a_2 \leq 10^2\left(x - \frac{a_1}{10}\right) < a_2 + 1 \Rightarrow \frac{a_2}{10^2} \leq x - \frac{a_1}{10} < \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right) < \frac{1}{10^2}$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά: Αν έχουμε βρει ακεραίους $a_1, \dots, a_n$ στο $\{0,1,\dots,9\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τέτοιους ώστε

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^m}, \quad \forall m = 1, \dots, n,$$

ακέραιο μέρος

θέτουμε $a_{n+1} = \left[10^{n+1}\left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right)\right]$. Τότε, $a_{n+1} \in \{0,1,\dots,9\}$

και $a_{n+1} \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right) < a_{n+1} + 1$

Άρα, $$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^{n+1}}$$

Επαγωγικά κατασκευάσαμε ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακεραίων στο σύνολο $\{0,1,\dots,9\}$ ώστε να ισχύουν οι ανισότητες:

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $\frac{1}{10^n} \to 0$, από το βασικό όριο 2, το θ. Sandwich μας δίνει ότι $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Δείξαμε λοιπόν την ύπαρξη του δεκαδικού αναπτύγματος του x.
Για τη μοναδικότητα του αναπτύγματος έχουμε: Στην περίπτωση που $a_n = 0$, $\forall n > p$, όταν δηλαδή $x = \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{10^n}$, $(a_p \neq 0)$ παρατηρούμε ότι

$$x = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_p - 1}{10^p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

Δηλαδή, ο x έχει και δεύτερο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Πράγματι, $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^p} \frac{1/10}{1 - 1/10} = \frac{1}{10^p}$

Άρα, $\sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_p - 1}{10^p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_p - 1}{10^p} + \frac{1}{10^p} = \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{10^n} = x.$

Το δεύτερο δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι μη τερματιζόμενο:
$a_n = 9$, $\forall n > p$.

Τέλος, μένει να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει ένα μοναδικό μη τερματιζόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Είναι σαφές ότι κάθε αριθμός στο $(0,1)$ έχει τουλάχιστον ένα μή τερματιζόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα: Κάθε μή δεκαδικός αριθμός έχει εξ' ορισμού μή τερματιζόμενο ανάπτυγμα. Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι και οι δεκαδικοί αριθμοί έχουν μή τερματιζόμενο ανάπτυγμα. Έστω τώρα $x \in (0,1)$ και $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ είναι δύο μή τερματιζόμενα δεκαδικά αναπτύγματα του x. Δηλαδή, $a_n, b_n \in \{0,1,\dots,9\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ και $\{n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\}$ είναι άπειρα. Θα δείξουμε ότι $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Σε αντίθετη περίπτωση, θα υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ με $a_n \neq b_n$. Θέτουμε $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$. Τότε, $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ και $a_n = b_n$, $\forall n < n_0$.
Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a_{n_0} < b_{n_0}$.
Τότε, $0 = x - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} + \frac{a_{n_0} - b_{n_0}}{10^{n_0}}$

$\Rightarrow 0 < \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$. Παρατηρούμε ότι

$a_n - b_n \leq 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού $a_n, b_n \in \{0,1,\dots,9\}$. Επίσης, θα υπάρχει $m \geq n_0+1$ ώστε $a_m - b_m < 9$. Αλλιώς, $a_n - b_n = 9$, $\forall n > n_0$ $\Rightarrow a_n = 9$ και $b_n = 0$, $\forall n > n_0$ $\Rightarrow$ Το δεκαδ. αναπτ. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ είναι τερματιζόμενο, άτοπο, λόγω υπόθεσης. Από την Παρατήρηση 2 έχουμε ότι $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{n_0}} \frac{1/10}{1 - 1/10} = \frac{1}{10^{n_0}}$

$\Rightarrow 0 < \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}} \Rightarrow 0 < b_{n_0} - a_{n_0} < 1$

Άτοπο, γιατί a_{n_0}, k_0 είναι ακέραιοι. Άρα το μη τερματιζόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα ενός πραγμ. αριθμού είναι μοναδικό.

<u>Παρατήρηση</u>: Με ανάλογη επιχειρηματολογία μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχει δυαδικό ανάπτυγμα:

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad \text{με } a_n \in \{0,1\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το ανάπτυγμα είναι μη τερματιζόμενο εκτός κι αν ο x είναι δυαδικός αριθμός: $x = \frac{m}{2^n}$ για κάποιους $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε πραγματικός αριθμός, μη μηδενικός, έχει μοναδικό μη τερματιζόμενο δυαδικό ανάπτυγμα.

<u>Τηλεσκοπικές Σειρές</u>

Μια σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$, όπου $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών, λέγεται τηλεσκοπική σειρά.

<u>Πρόταση</u>: Η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (ή στο $\pm\infty$), αν και μόνο αν η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό (ή στο $\pm\infty$).

Τότε, $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - a_1$$

<u>Απόδ</u>: $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Για $n \to \infty$, έχουμε τον ισχυρισμό της πρότασης.

Παραδείγματα: 1) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$. Πράγματι,

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right), \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Άρα, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = -\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} - 1\right] = 1$

2) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ συγκλίνει και υπολογίστε το άθροισμά της.

Λύση: $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(a_{n+1} - a_n\right)$

$$\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)}$$

~~τηλεσκ.~~ ~~τηλεσκ.~~

όπου, $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} - 1\right) = \frac{1}{2}$

3) $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}\right)$$

−τηλεσκ. −τηλεσκ.

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$: Έχουμε, $\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, αφού $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, (Παρ. 1)

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \dots \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \le 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2$.

p - Σειρές

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$, λέγεται p-σειρά.

Αν $p = 0$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$. Αν $p < 0$, τότε $\frac{1}{n^p} = n^{-p} \longrightarrow +\infty$, αφού $-p > 0$. Άρα, $\frac{1}{n^p} \not\to 0$ όταν $p < 0$. Από το κριτήριο απόκλισης έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, αν $p \le 0$.

Όταν $p > 0$, τότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \ge 1}$ είναι γν. φθίνουσα. Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$, γεωμετρική σειρά

με λόγο $\theta = \frac{1}{2^{p-1}}$. Έχουμε ότι $0 < \theta$, και $\theta < 1 \Leftrightarrow$

$2^{p-1} > 1 \Leftrightarrow p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1$. Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty \Leftrightarrow p > 1$.

Άρα, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \Leftrightarrow p > 1}$, από το θ. συμπύκνωσης του Cauchy