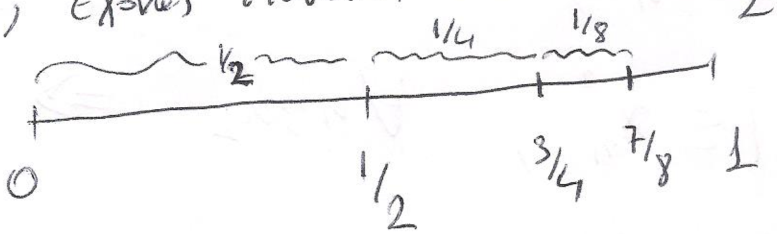
ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η έννοια της σειράς προέκυψε μέσω του παράδοξου του Ζήνωνα, ενός σοφιστή στην Αρχαία Ελλάδα.

Ο Ζήνων ισχυριζόταν ότι ένας δρομέας που κινείται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ξεκινώντας από τη θέση $x=0$, δεν θα φτάσει ποτέ στη θέση $x=1$.

Το επιχείρημά του ήταν ως εξής: Πρώτα ο δρομέας θα περάσει από τη θέση $x=1/2$ έχοντας διανύσει απόσταση ίση με $1/2$. Μετά πρέπει να περάσει από τη θέση $x=3/4$, έχοντας διανύσει απόσταση $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.



Ο δρομέας θα συνεχίσει ως τη θέση $x=7/8$ έχοντας διανύσει απόσταση ίση με $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον, χωρίς να τερματιστεί. Επειδή είναι αδύνατο για το δρομέα να τρέχει επ' άπειρον, ο Ζήνων κατέληγε στο συμπέρασμα ότι ο δρομέας δεν θα φτάσει ποτέ στη θέση $x=1$.

Ο δρομέας, βέβαια, θα φτάσει στη θέση $x=1$.

Όπως όλες οι παραδοξολογίες, το επιχείρημα του Ζήνωνα αποτελείται από μία μίξη ορθών και λανθασμένων ισχυρισμών. Ο Ζήνων παρατηρεί σωστά ότι το άθροισμα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}$ είναι μικρότερο του 1, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Το λάθος στο συμπέρασμα του Ζήνωνα οφείλεται στο γεγονός ότι η διαφορά $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$, αν και θετική, μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή έτσι ώστε μία απόσταση ίση με $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ να μην είναι ορατή με το μάτι. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο δρομέας φτάνει στη θέση $x=1$.

Βλέπουμε ότι στο επιχείρημα του Ζήνωνα εμφανίζεται έμμεσα η έννοια του ορίου: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1$, ενώ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Διαισθητικά, ο 1 είναι το άθροισμα όλων των προσθετέων $\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Ο Ζήνων αδυνατούσε να συλλάβει την έννοια του αθροίσματος ενός άπειρου πλήθους αριθμών και γι' αυτό κατέληξε στο παράδοξο συμπέρασμά του. Μέσω των σειρών μπορούμε να αθροίσουμε ένα άπειρο πλήθος αριθμών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

Ορισμός: Αν $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ένα σύμβολο που δηλώνει την πρόθεσή μας να αθροίσουμε όλους τους όρους της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να συγχέουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$, η οποία είναι υπαρκτή, με τη σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ που είναι μόνο ένα σύμβολο προθέσεων χωρίς να έχει, κατ' ανάγκη, κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο. Στα επόμενα θα εξετάσουμε πότε το σύμβολο $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ αναπαριστά ένα μαθηματικό αντικείμενο (πραγματικό αριθμό, $\pm\infty$) ή δεν έχει κανένα μαθηματικό περιεχόμενο και παραμένει ένα σύμβολο (ανεκπλήρωτων) προθέσεων.

Ορισμός (Ακολουθία μερικών αθροισμάτων μίας ακολουθίας πραγματικών).
Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών. Ορίζουμε μία νέα ακολουθία πραγματικών $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ως εξής:

$S_1 = a_1$ και $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Με άλλα λόγια, $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Εναλλακτικά, $S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} a_k$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Η ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ λέγεται η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

Παρατήρηση: Η ακολουθία ~~των~~ $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, των μερικών αθροισμάτων της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, ~~δεν~~ ~~έχει~~ είναι μία ακολουθία πολύ διαφορετική από την $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

Παραδείγματα: 1) $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $S_n = \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-φορές}} = n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) $a_n = (-1)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} (-1)^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$S_{2n} = \sum_{k\geq 1}^{2n} (-1)^k = \underbrace{(-1+1)+(-1+1)+\dots+(-1+1)}_{n \text{ παρενθέσεις}} = 0,$$ ενώ

$$S_{2n-1} = \sum_{k\geq 1}^{2n-1} (-1)^k = \sum_{k\geq 1}^{2n-2} (-1)^k + (-1)^{2n-1} = S_{2n-2} + (-1) = 0 - 1 = -1$$

Άρα η $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία: $-1, 0, -1, 0, -1, \dots$

3) $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(1/2)^n - 1}{1/2 - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Άρα, $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

4) $a_n = \frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Δεν υπάρχει γνωστή έκφραση του S_n ως συνάρτηση του n.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Έστω $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Τότε:

(1) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, όταν η ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αν $\lambda = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$, τότε γράφουμε $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lambda$ και λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο λ, ή, ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ ισούται με λ.

(2) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $+\infty$, όταν $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Γράφουμε τότε ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$. Επίσης λέμε ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ είναι το $+\infty$.

(3) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $-\infty$, όταν $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$. Γράφουμε τότε ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = -\infty$. Επίσης λέμε ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ είναι το $-\infty$.

(4) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, όταν η ακολουθία

των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει ούτε σε πραγματικό αριθμό, ούτε στα $\pm\infty$.

<u>Παρατήρηση</u>: 1) $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} 0 = 0$, αφού $S_n = \underbrace{0+\dots+0}_{n\text{-φορές}} = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) Αν $a_n = c \neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $S_n = \sum\limits_{k\geq 1}^{n} c = nc$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n = +\infty$, αν $c>0$, ενώ $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_n = -\infty$, αν $c<0$.

3) $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει, αφού όπως είδαμε $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$, $n\in\mathbb{N}$, ικανοποιεί $S_{2n} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ενώ, $S_{2n-1} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$. Επειδή $0\neq -1$, έπεται ότι η $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει σε πραγμ. αριθμό. Αν $S_n \to \pm\infty$, θα έπρεπε $S_{2n} \to \pm\infty$, που δεν ισχύει.

Άρα, $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Πράγματι, $S_n = \sum\limits_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, από τα προηγούμενα παραδείγματα. Αφού $\frac{1}{2^n} \to 0$ (βασικό όριο) έπεται ότι $S_n \to 1$. Άρα, $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

5) $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $b_n = \frac{x^n}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε γνωρίζουμε ότι $S_n = \sum\limits_{k\geq 1}^{n} b_k = \sum\limits_{k\geq 0}^{n} b_k - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x - 1$.

Γράφουμε επίσης ότι $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Αλγεβρικές Ιδιότητες Σειρών</u>

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

1) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \mu \in \mathbb{R}$, τότε
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lambda + \mu.$$

2) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} t a_n = t \sum_{n=1}^{\infty} a_n = t\lambda$

3) Αν $p \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε αριθμό, ($\pm\infty$)) αν και μόνο αν η $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε αριθμό, ($\pm\infty$).

Ειδικότερα, αν $p>1$, γράφουμε ότι
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{\infty} a_n$$
με την προϋπόθεση ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει είτε σε πραγματικό αριθμό, είτε στο $\pm\infty$.

Σημειώνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ καλείται <u>ουρά</u> της σειράς
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

4) Αν $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq1}^{\infty} b_n = \pm\infty$, τότε $\sum_{n\geq1}^{\infty} (a_n+b_n) = \pm\infty$.

5) Αν $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = \lambda\in\mathbb{R}$ και $\sum_{n\geq1}^{\infty} b_n = \pm\infty$, τότε

$$\sum_{n\geq1}^{\infty} (a_n+b_n) = \pm\infty.$$

Η απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων είναι άμεση συνέπεια αντίστοιχων ιδιοτήτων των ακολουθιών των μερικών αθροισμάτων των $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$.

Σειρές και διάταξη

Πρόταση 1: Έστω $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών ώστε $a_n \leq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι οι σειρές $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n\geq1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς.

Τότε, $$\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n\geq1}^{\infty} b_n.$$

Πρόταση 2: Έστω $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ ακολουθίες με $a_n \leq b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n\geq1}^{\infty} b_n = +\infty$.

2) Αν $\sum_{n\geq1}^{\infty} b_n = -\infty$, τότε και $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Σειρές θετικών όρων

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ ακολουθία <u>μη αρνητικών</u> πραγματικών. Τότε η σειρά $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει είτε σε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό, είτε στο $+\infty$.

<u>Απόδ</u>: $S_n = \sum_{k\geq1}^{n} a_k$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $a_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\geq1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

Κατά συνέπεια, είτε $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ (αν $(S_n)_{n\geq1}^{\infty}$ φραγμένη), είτε $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (αν η $(S_n)_{n\geq1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη).

Τέλος, $S_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $a_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό (μη αρνητικό) αριθμό, ακριβώς όταν υπάρχει $C>0$ ώστε $\sum_{k\geq1}^{n} a_k \leq C$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση (και μόνο) γράφουμε $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Το σύμβολο $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n < +\infty$ έχει νόημα μόνο όταν $a_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Σημαντικό Παράδειγμα: Η αρμονική σειρά.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Αφού $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, γνωρίζουμε ότι είτε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = θετικός πραγμ., είτε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Θα αποκλείσουμε την περίπτωση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ να συγκλίνει σε αριθμό. Θεωρούμε την ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, των μερικών αθροισμάτων της $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Οι Bernoulli bros παρατήρησαν ότι:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα,

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{ - προσθετέοι}}$$

και ο $\frac{1}{2n}$ είναι ο μικρότερος

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{ - προσθετέοι}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $S_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε και $S_{2n} \longrightarrow \lambda$ $\left((S_{2n})_{n \geq 1} \right.$ υπακολουθία της $\left. (S_n)_{n\geq 1}^{\infty} \right)$. Άρα, $S_{2n} - S_n \longrightarrow \lambda - \lambda = 0$. Όμως, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$, Άτοπο.

Άρα, αναγκαία, $S_n \longrightarrow +\infty$. Δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών

<u>Κριτήριο Cauchy</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών.

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό $\iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon, \quad \forall m \geq n \geq n_0.$$

<u>Απόδ</u>: Η εκ δεξιών συνθήκη ισοδυναμεί με του να είναι η ακολουθία των μερ. αθροισμ. $(S_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}$, ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$ για $m \geq n$ στο $\mathbb{N}$.

<u>Σημείωση</u>: Όταν η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό, ή, $\pm\infty$,

τότε $$\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1}^{n} a_k .$$

<u>Κριτήριο Απόκλισης</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών.

Υποθέτουμε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ <u>δεν</u> συγκλίνει στο 0.

Τότε, η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ <u>δεν</u> συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Θα μπορούσε όμως $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.)

<u>Απόδ</u>: Έστω ότι $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} a_k$ $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $S_n \to \lambda$. Άρα, $S_{n-1} \to \lambda$. Συνεπώς,

$a_n = S_n - S_{n-1} \to \lambda - \lambda = 0$, άτοπο.

<u>Πόρισμα</u>: Αν η σειρά $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε $a_n \to 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

<u>Απόδ</u>: Αν $a_n \not\to 0$, τότε το κριτήριο απόκλισης μας δίνει ότι η $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό, αντίθετα με την υπόθεσή μας. Άρα, αναγκαστικά, $a_n \to 0$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: $\frac{1}{n} \to 0$, όμως, $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (Αρμ. Σειρά)