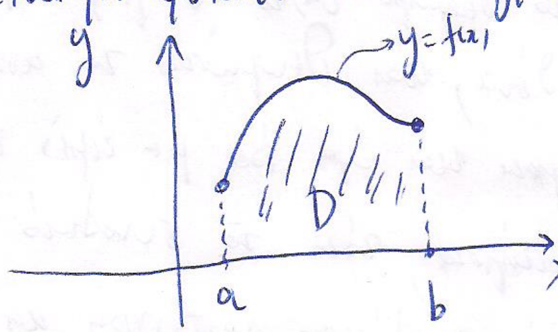
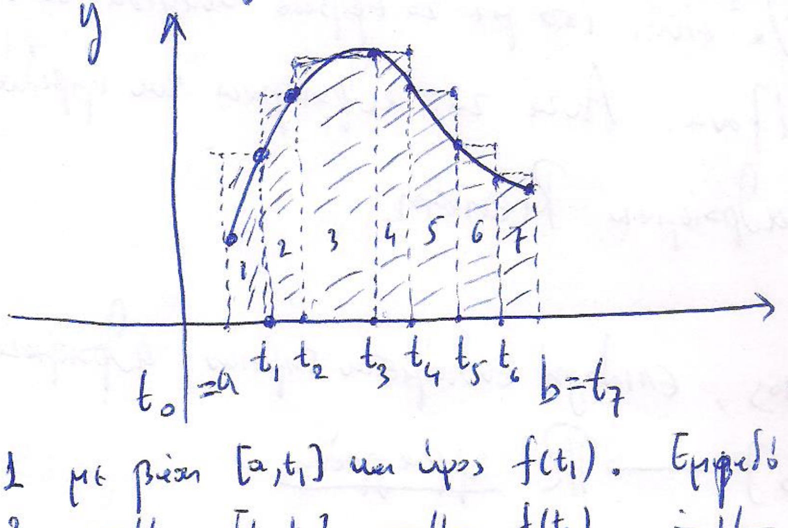
Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα (Ολοκλήρωμα Riemann)

Ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης είναι μία κλάση συναρτήσεων, το ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης είναι αριθμός. Θα δούμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, αναπαριστά το εμβαδό του χωρίου του επιπέδου που φράσσεται ανάμεσα στο γράφημα της $y=f(x)$ και τον άξονα των x (όταν $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$). Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, είναι μη αρνητική και το γράφημά της είναι η καμπύλη του σχήματος:



Αν D είναι το επίπεδο χωρίο που φράσσεται ανάμεσα στις $y=f(x)$ και $y=0$, μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδό του D μέσω του συνολικού εμβαδού ενός πεπερασμένου πλήθους ορθογωνίων που έχουν βάσεις στο διάστημα $[a,b]$ και ύψη που αγγίζουν το γράφημα της $y=f(x)$. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε 7 ορθογώνια:



Το 1 με βάση $[a,t_1]$ και ύψος $f(t_1)$. Εμβαδό $E_1 = f(t_1)(t_1-a)$

Το 2 —ll— $[t_1,t_2]$ —ll— $f(t_2)$. —ll— $E_2 = f(t_2)(t_2-t_1)$

Το 3 —ll— $[t_2,t_3]$ —ll— $f(t_3)$. —ll— $E_3 = f(t_3)(t_3-t_2)$

Το 4 —ll— $[t_3,t_4]$ —ll— $f(t_3)$. —ll— $E_4 = f(t_3)(t_4-t_3)$

Το 5 —ll— $[t_4,t_5]$ —ll— $f(t_4)$. —ll— $E_5 = f(t_4)(t_5-t_4)$

Το 6 —ll— $[t_5,t_6]$ —ll— $f(t_5)$. —ll— $E_6 = f(t_5)(t_6-t_5)$

Το 7 —ll— $[t_6,b]$ —ll— $f(t_6)$. —ll— $E_7 = f(t_6)(b-t_6)$

Θέτουμε $t_0 = a$ και $t_7 = b$, τότε το συνολικό εμβαδό των 7 ορθογωνίων είναι $\sum_{i=1}^{7} E_i = \sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, όπου $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\forall i = 1, \dots, 7$. Συγκεκριμένα, $\xi_i = t_i$, $i=1,2,3$, ενώ $\xi_i = t_{i-1}$ με $i=4,5,6,7$. Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ με $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \le 7$, είναι μία προσέγγιση το εμβαδό ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και τον άξονα των x. Διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι χωρίζοντας το διάστημα $[a,b]$ σε μεγαλύτερο αριθμό υποδιαστημάτων με μικρότερο μήκος το καθένα, και θεωρώντας τα αντίστοιχα ορθογώνια με βάσεις σε αυτά τα διαστήματα και ύψη ίσα με τιμές της $f(x)$ για x να ανήκει σε αυτά τα διαστήματα, τότε το συνολικό εμβαδό των νέων ορθογωνίων θα αποτελεί μία καλύτερη προσέγγιση από την αρχική, για το εμβαδό του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα $y=f(x)$ και τον x-άξονα. Για να υπολογίσουμε με ακρίβεια αυτό το εμβαδό θα πρέπει να σχηματίσουμε μία ακολουθία αθροισμάτων εμβαδών ορθογωνίων, όπως οι παραπάνω, όπου οι βάσεις των ορθογωνίων θα τείνουν στο 0 καθώς το $n \to \infty$, και το όριο της ακολουθίας των συνολικών εμβαδών θα είναι ίσο με το εμβαδό ανάμεσα στην $y = f(x)$ και τον x-άξονα. Αυτά τα αθροίσματα των εμβαδών των ορθογωνίων καλούνται αθροίσματα Riemann.

Ορισμοί: Διαμέριση διαστήματος, επιλογή ενδιάμεσων σημείων, αθροίσματα Riemann.

Έστω $a<b$ και $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη.

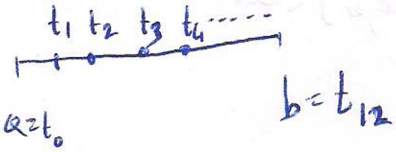
Ορισμός 1: Μία διαμέριση του $[a,b]$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια Δ από κλειστά υποδιαστήματα του $[a,b]$ τέτοια ώστε:

(α) Για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $I\in\Delta$ με $x\in I$. Δηλαδή, η ένωση των διαστημάτων της Δ ισούται με το $[a,b]$

(b) Αν $I_1, I_2\in\Delta$ και $I_1\neq I_2$, τότε είτε $I_1\cap I_2=\emptyset$, είτε τα I_1, I_2 είναι διαδοχικά :

(δηλαδή, είτε $I_1\cap I_2=\emptyset$, είτε $I_1\cap I_2=$ μονοσύνολο)

Π.χ.:



Επιλέγοντας 13 σημεία στο $[a,b]$, τα $(t_i)_{i=0}^{12}$ με $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{11}<t_{12}=b$, σχηματίζουμε τη διαμέριση $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ του $[a,b]$

<u>Ορισμός 2</u>: Έστω Δ μία διαμέριση του $[a,b]$. Μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ είναι ένα υποσύνολο $\vec{\xi}_\Delta$ του $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\} \quad \text{με} \quad \xi_I\in I, \ \forall I\in\Delta.$$

(Με άλλα λόγια μία επιλογή σημείων για τη Δ σχηματίζεται επιλέγοντας ένα σημείο ξ_I από κάθε διάστημα I της Δ, και θεωρώντας το πεπερασμένο σύνολο $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$).

Π.χ.: Αν $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ είναι η διαμέριση του $[a,b]$ του προηγούμενου παραδείγματος, τότε επιλέγουμε τυχαία $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\forall i=1,\dots,12$ και σχηματίζουμε το σύνολο $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_i : i=1,\dots,12\}$ που είναι μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ. Εδώ,

$$\xi_{[t_{i-1},t_i]}=\xi_i, \ \forall i=1,\dots,12.$$

Ορισμός 3 (Αθροίσματα Riemann για μία φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$): Αν Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ, τότε ο αριθμός

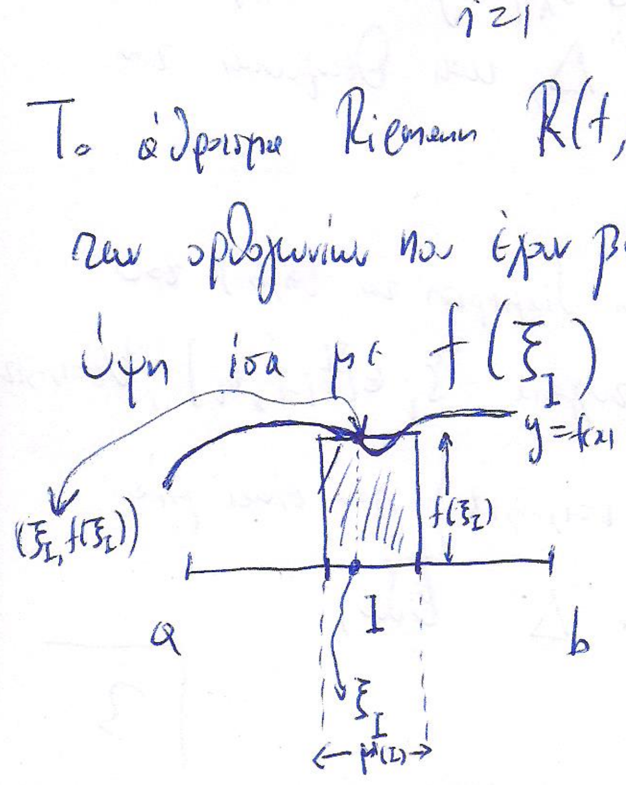
$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I), \quad \text{όπου } \vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$$

και $\mu(I)$ = μήκος του διαστήματος I, καλείται άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση Δ του $[a,b]$ και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ.

Π.χ.: Αν $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ διαμέριση του $[a,b]$, $t_0=a$, $t_{12}=b$, και $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_{[t_{i-1},t_i]} : i=1,\dots,12\}=\{\xi_i : i=1,\dots,12\}$ με $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\forall i=1,\dots,12$, τότε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{i=1}^{12} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Το άθροισμα Riemann $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$ ισούται με το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων που έχουν βάση τα διαστήματα I της Δ και ύψη ίσα με $f(\xi_I)$, $\forall I\in\Delta$.



Είναι σαφές ότι υπάρχουν άπειρα αθροίσματα Riemann για μία $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αφού υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις Δ του $[a,b]$ και για κάθε τέτοια διαμέριση Δ υπάρχουν άπειρες επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ.

<u>Ορισμός</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, θέτουμε

1) $\mathcal{R} = \left\{ R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b],\ \vec{\xi}_\Delta \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } \Delta \right\}$

Δηλαδή, $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο των αθροισμάτων Riemann της f.

2) Αν $n\in\mathbb{N}$ και $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)\in\mathcal{R}$, τότε λέμε ότι το $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$ είναι άθροισμα Riemann τύπου n, όταν $\mu(I)\leq\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta$.

Θέτουμε $\mathcal{R}_n = \left\{ R\in\mathcal{R} : R \text{ άθροισμα Riemann τύπου } n \right\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\mathcal{R}_{n+1}\subset\mathcal{R}_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και

$\mathcal{R}_1=\mathcal{R}$ αφού $\mu(I)\leq b-a$, $\forall I\subsetneq[a,b]$ διάστημα, κλειστό.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με $C\leq f(x)\leq D$, $\forall x\in[a,b]$, τότε
$$C(b-a)\leq R\leq D(b-a),\quad \forall R\in\mathcal{R}.$$

<u>Απόδειξη</u>: $R=R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)$. Αφού $C\leq f(\xi_I)\leq D$ $\forall I\in\Delta$, έχουμε
$$\sum_{I\in\Delta} C\mu(I)\leq\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)\leq\sum_{I\in\Delta} D\mu(I).$$

Άρα, $C(b-a) \leq R \leq D(b-a)$, αφού $\sum_{I \in \Delta} \mu(I) = b-a$, εφόσον

Δ διαμέριση του $[a,b]$

<u>Ορισμός</u> (Ολοκληρώσιμης κατά Riemann συνάρτησης) Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f καλείται Riemann ολοκληρώσιμη όταν ικανοποιεί την ιδιότητα: Για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της f, με $R_n \in \mathcal{R}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n$ υπάρχει και είναι (αναγκαία) πραγματικός.

<u>Παρατήρηση</u>: Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη όταν <u>για κάθε ακολουθία</u> αθροισμάτων Riemann της f, $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, με R_n <u>αθρ. Riemann τάξης $n \in \mathbb{N}$</u>, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n$ είναι πραγματικός. Παρατηρούμε ότι λόγω της έχουμε ότι κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann της f είναι φραγμένη πρόσεισης, κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann της f είναι φραγμένη συγκλίνει.
Κατά συνέπεια θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αν συγκλίνει.

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(R_n')_{n\geq 1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες αθροισμάτων Riemann της f τέτοιες ώστε R_n και R_n' είναι αθρ. Riemann τάξης n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_n'$$

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε $(R_n'')_{n\geq 1}^{\infty}$ ως εξής: $R_{2n-1}'' = R_{2n-1}$ και $R_{2n}'' = R_{2n}'$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Δηλαδή, $R_n'' = \begin{cases} R_n, & \text{αν } n = \text{περιττός} \\ R_n', & \text{αν } n = \text{άρτιος} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε, η $(R''_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αθροισμάτων Riemann της f με R''_n άθροισμα Riemann τύπου n, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} R''_n \in \mathbb{R}$, αφού f ολοκληρώσιμη.

Συνεπώς έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} R''_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} R''_n = \lim\limits_{n\to\infty} R''_{2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} R'_{2n} = \lim_{n\to\infty} R'_n$$

από γνωστές ιδιότητες των υπακολουθιών συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών.

<u>Ορισμός</u> (Ολοκλήρωμα Riemann). Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Ονομάζουμε ολοκλήρωμα Riemann (ή ορισμένο ολοκλήρωμα) της f, και το συμβολίζουμε με $\int_a^b f$ (ή $\int_a^b f(x)dx$), το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$, όπου R_n άθροισμα Riemann τύπου n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$.

<u>Παρατήρηση</u>: Από την Πρόταση 2 έχουμε ότι το $\int_a^b f$ είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με R_n άθροισμα Riemann τύπου n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, που επιλέγουμε.

<u>Παράδειγμα</u>: 1) Αν $f(x)=c=$ σταθερά, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f = c(b-a)$. Πράγματι, αν Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ τότε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I) = \sum_{I\in\Delta} c\,\mu(I) = c\sum_{I\in\Delta}\mu(I) = c(b-a)$$

αφού $\sum\limits_{I\in\Delta}\mu(I) = b-a$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Συνεπώς,

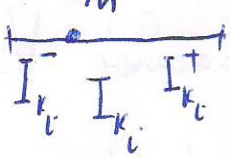
$$\mathcal{R} = \{c(b-a)\} \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a)$$

2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $\forall x\in[0,1]$. Τότε, $\int_0^1 f=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$. Έστω $n\in\mathbb{N}$.

Θεωρούμε μία τυχαία διαμέριση Δ του $[0,1]$ με $\mu(I)<\frac{1}{n}$, $\forall I\in\Delta$. Επίσης θεωρούμε μία τυχαία ενδιάμεση επιλογή σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ. Η Δ αποτελείται από διαδοχικά, κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$. Μπορούμε να αριθμήσουμε αυτά τα διαστήματα σαν $I_1,\dots,I_m$, όπου $m=|\Delta|$, έτσι ώστε I_i και I_{i+1} να είναι διαδοχικά, $\max I_i=\min I_{i+1}$, $\forall i=1,\dots,m-1$.

Άρα, $0\in I_1$, και $1\in I_m$. Για κάθε φυσικό $i\in\{1,\dots,n\}$, θεωρούμε το πρώτο από τα αριστερά διάστημα I_{k_i} με $\frac{i}{n}\in I_{k_i}$, $\forall i=1,\dots,n$. Τότε $2\le k_1<k_2<\dots<k_n=m$ γιατί το μήκος κάθε διαστήματος της Δ είναι μικρότερο από $\frac{1}{n}$. Ειδικότερα,

, $\forall i=1,\dots,n$, όπου θέτουμε $k_0=1$. Επίσης, θέτουμε $\xi_i=\xi_{I_i}$, $\forall i=1,\dots,m$. Εξετάζουμε το άθροισμα Riemann $R_n=R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{f(\xi_i)}_{\xi_i}\mu(I_i)$. Συμβολίζουμε με $I_{k_i}^-$ το υποδιάστημα του I_{k_i} αριστερά από το i/n, και με $I_{k_i}^+$ το υποδιάστημα του I_{k_i} δεξιά από το i/n:

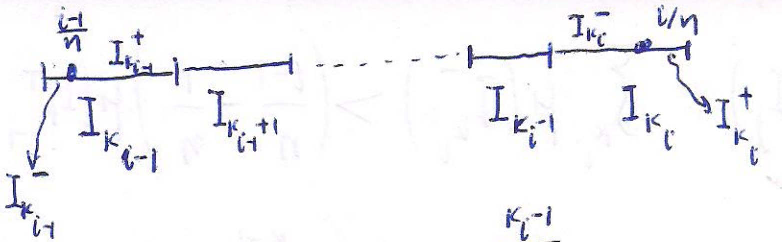


, $\forall i=1,\dots,n$

Για $i=0$, έχουμε $k_0=1$ και $I_{k_0}^+=I_{k_0}$, ενώ για $i=n$ έχουμε $I_{k_n}^-=I_{k_n}$

Τότε, $R_n=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{k_{i-1}}\mu(I_{k_{i-1}}^+)+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\,\mu(I_j)+\xi_{k_i}\,\mu(I_{k_i}^-)\right]$$



Βλέπουμε ότι $\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j) + \mu(I^-_{k_i}) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$

Επίσης, $\frac{i-1}{n} \leq \xi_j \leq \frac{i}{n}$, $\forall j = k_{i-1}+1, \dots, k_i-1$

Ενώ, $\left|\xi_{k_{i-1}} - \frac{i-1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ και $\left|\xi_{k_i} - \frac{i}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

Ακόμα έχουμε ότι $\xi_{k_{i-1}} < \frac{i}{n}$ και $\xi_{k_i} > \frac{i-1}{n}$. Άρα,

$$\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i}) < \frac{i}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\frac{i}{n}\mu(I_j) +$$

$$+\left(\frac{i}{n}+\frac{1}{n}\right)\mu(I^-_{k_i}) = \frac{i}{n}\left[\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j) + \mu(I^-_{k_i})\right] + \frac{1}{n}\mu(I^-_{k_i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i}) \leq \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\mu(I^-_{k_i}) \leq \frac{i}{n^2} + \frac{1}{n^2},$$

$\forall i = 1, \dots, n$. Άρα, $R_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i})\right] < \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) =$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_n < \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}$, αφού $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (άθροισμα αριθμ. προόδου). Ανάλογα έχουμε ότι

$$\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1} \xi_j\,\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i}) > \left(\frac{i-1}{n}-\frac{1}{n}\right)\mu(I^+_{k_{i-1}}) +$$

$$+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\frac{i-1}{n}\mu(I_j) + \frac{i-1}{n}\mu(I^-_{k_i}) = \frac{i-1}{n}\left[\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j) + \mu(I^-_{k_i})\right] -$$

$$-\frac{1}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}}) = \frac{i-1}{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right) - \frac{1}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}}) \geq \frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

αφού $\mu(I^+_{k_{i-1}}) \leq \mu(I_{k_{i-1}}) < \frac{1}{n}$, $\forall i=1,\dots,n$. Συνολικά έχουμε:

$$R_n > \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i-2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^2}\cdot n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} - \frac{2}{n}$$

$\Rightarrow R_n > \dfrac{n(n+1)}{2n^2} - \dfrac{2}{n}$. Άρα, $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{2}{n} < R_n < \dfrac{n+1}{2n} + \dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

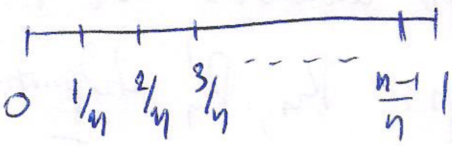
Από το θ. Sandwich έπεται τώρα ότι $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{2}$. Άρα,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο υπολογισμός ακόμα και ενός απλού ολοκληρώματος, όπως το $\int_0^1 x\,dx$, φαίνεται δυσχερής με χρήση μόνο του ορισμού. Χρειαζόμαστε λοιπόν κάποιες μεθόδους υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων ούτως ώστε να αποφύγουμε την απευθείας εφαρμογή του ορισμού του ολοκληρώματος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο υπολογισμός θα ήταν εύκολος αν γνωρίζαμε ότι η $f(x)=x$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

Τώρα θα είχαμε την ευχέρεια να επιλέξουμε μία βολικότερη ακολουθία αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ (και όχι μία τυχαία) και να υπολογίσουμε το $\lim_{n\to\infty} R_n$ που θα ήταν αναγκαία ίσο με $\int_0^1 x\,dx$.

Π.χ, για $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαμέριση $\Delta_n=\{[0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],\dots,[\frac{n-1}{n},1]\}$ και την επιλογή



ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}=\left\{\frac{k}{n} : k=1,\dots,n\right\}$, δηλαδή, $\xi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}=\frac{k}{n}$ $\forall k=1,\dots,n$. Τότε το άθροισμα Riemann $R_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\mu\left(\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right)$ είναι τάξης $n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 2$. Βλέπουμε ότι $R_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\Rightarrow$

$$\Rightarrow R_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1+2+\dots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2},\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow R_n=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$$

Άρα, $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ γνωρίζοντας όμως ότι η $f(x)=x$ είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Παρατήρηση</u>: Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}=\text{άρρητοι του }[0,1]\end{cases}$

Τότε η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν Δ είναι διαμέριση του $[0,1]$ και $\vec{\xi}_\Delta$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ με $\xi_I\in\mathbb{Q}$, $\forall I\in\Delta$, τότε $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta}1\cdot\mu(I)=1$. Αν $\vec{\eta}_\Delta$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ με $\eta_I\notin\mathbb{Q}$, $\forall I\in\Delta$, τότε

$R(f,\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = \sum\limits_{I\in\Delta} 0\cdot \mu(I) = 0$. Μπορούμε να βρούμε τέτοιες επιλογές σημείων $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ για κάθε διαμέριση Δ του $[0,1]$ επειδή το σύνολο των ρητών και το σύνολο των αρρήτων είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε ακολουθίες αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}$ και $(R'_n)_{n\geq 1}$ της f με R_n, R'_n αθροίσματα Riemann τάξης n, $\forall n\in\mathbb{N}$, ώστε $R_n=1$ και $R'_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $R_n\to 1$ και $R'_n\to 0$ συνεπώς η f δεν μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Τότε:

(1) Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε η λf είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

(3) Η fg είναι ολοκληρώσιμη

(4) Αν υπάρχει $\lambda>0$ ώστε $|f(x)|\geq\lambda$, $\forall x\in[a,b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη

(5) $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(6) Αν $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f \geq 0$.

(7) Αν $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Απόδειξη: (1) Βλέπουμε εύκολα ότι $R(f+g,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) + R(g,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ για του Δ. Έπεται τώρα ότι αν $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι

Πρόταση 3: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $f|[\gamma,\delta]$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $a\le\gamma\le\delta\le b$.

(2) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f$, $\forall \gamma\in(a,b)$.

(3) Αν $\gamma\in(a,b)$ και $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma,b]$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε μία ακολουθία $(C_n)_{n\ge1}^{\infty}$ ώστε το C_n να είναι άθροισμα Cauchy-Riemann τύπου n της $f|[\gamma,\delta]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $C_n = R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n},\vec{\eta}_{\Delta_n})$ όπου Δ_n διαμέριση του $[\gamma,\delta]$ με $\mu(I)<\frac{\delta-\gamma}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Πρόταση 5</u>: Έστω $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Υποθέτουμε ότι $\forall \gamma\in(a,b)$ η συνάρτηση $f|[a,\gamma]$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f = \lim\limits_{\gamma\to b^-} \int_a^\gamma f$

$y \to b^-$

…ση 6: Έστω I_0 φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με άκρα $a_0 < b_0$. Ορί-
…ουμε τη συνάρτηση $\chi_{I_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_0 \\ 0, & x \notin I_0 \end{cases}$.

…ξτε η χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b]$ με $a \leq a_0$ και $b \geq b_0$, και $\int_a^b \chi_{I_0} = \mu(I_0)$.

Χαρακτηρισμός ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}$ λέγεται σύνολο μηδενικού μέτρου (ή ότι έχει μέτρο 0) όταν <u>για κάθε</u> $\epsilon > 0$ υπάρχει μία ακολουθία από ανοιχτά και φραγμένα διαστήματα $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $E \subset \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} (a_n, b_n)$ (δηλαδή, $\forall x \in E \ \exists m \in \mathbb{N}$ με $x \in (a_m, b_m)$.) και $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \epsilon$.

Παρατήρηση: E είναι μηδενικού μέτρου όταν μπορεί να καλυφθεί από μία ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων συνολικού μήκους αυθαίρετα μικρού.

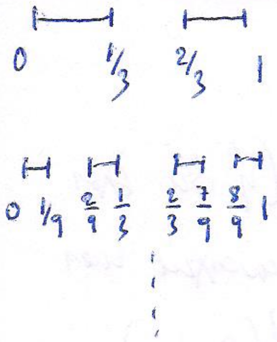
Παραδείγματα: 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μηδενικού μέτρου.

2) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μηδενικού μέτρου: Ένα $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του είναι οι όροι μίας ακολουθίας. Όταν δηλαδή $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $(a_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Π.χ. τα υποσύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα. Το E έχει μέτρο 0 γιατί αν $\epsilon > 0$ τυχόν, θεωρούμε τα ανοιχτά διαστήματα $\left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, έχουμε ότι

$$E \subset \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} \left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) \text{ και } \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left[\left(a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) - \left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2 \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \epsilon \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon \cdot 1 = \epsilon.$$

3) Υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$, μηδενικού μέτρου, που είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$. Π.χ., το σύνολο Cantor, $C = \left\{ \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n = 0, \text{ ή, } x_n = 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$ Αποδεικνύεται ότι το C είναι μηδενικού μέτρου και ότι υπάρχει αντιστοιχία $\varphi : C \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}$. Δηλαδή, C και $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά.



$C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$

$C_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

C_3 = ένωση των 8 υποδιαστημάτων που προκύπτουν τριχοτομώντας καθένα από τα διαστήματα του C_2 και κρατώντας τα δύο ακραία. Π.χ., από το $[0,\frac{1}{9}]$ κρατάμε τα $[0,\frac{1}{27}]\cup[\frac{2}{27},\frac{1}{9}]$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, C_n = ένωση 2^n υποδιαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Το σύνολο Cantor $C=\bigcap_{n\geq 1} C_n$. $(C_1\supset C_2\supset C_3\supset\cdots\supset C_n\supset C_{n+1}\supset\cdots)$

Το συνολικό μήκος των διαστημάτων που απαρτίζουν το C_n είναι ίσο με $\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Αφού $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ και $C\subset C_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι C είναι μέτρου 0.

Μπορεί να δειχθεί ότι το C είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, επειδή είναι τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$: Κάθε σημείο του C είναι όριο μιας ακολουθίας διαφόρων ανά δύο στοιχείων του C. Τα τέλεια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$ όταν είναι κλειστά. Όταν δηλαδή περιέχουν τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών με όρους από τα σύνολα αυτά.

4) Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ με θετικό μήκος, δεν είναι μέτρου 0.

Ορισμός: Έστω $I\subset\mathbb{R}$ διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Λέμε ότι η f ικανοποιεί την ιδιότητα (P) σχεδόν παντού στο I, όταν το υποσύνολο $E=\{x\in I:$ η f δεν ικανοποιεί την (P) στο σημείο $x\}$ είναι σύνολο μέτρου 0.

Π.χ. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ -1, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, είναι σχεδόν παντού αρνητική, αφού

$E=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 0\}=\mathbb{Q}$ είναι μηδενικού μέτρου.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$

Σημείωση: $\int_a^a f=0$ και $\int_a^b f=-\int_b^a f$. Έτσι, $\int_a^b f=\int_a^\gamma f+\int_\gamma^b f$ ανεξάρτητα από τη σχετική θέση των a,b,γ.

Απόδειξη (ΘΘΑΛ). Η F είναι καλά ορισμένη γιατί η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα και σε κάθε διάστημα $[a,x]$, $(x\le b)$. Συνεπώς υπάρχει το $\int_a^x f$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έστω $x_0\in[a,b]$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$. Έχουμε τώρα ότι:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right|=\left|\frac{\int_a^x f-\int_a^{x_0} f-\int_{x_0}^x f(x_0)}{x-x_0}\right|=$$

$$=\left|\frac{\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)}{x-x_0}\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x[f(t)-f(x_0)]dt\right|\le\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|dt\le\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x\epsilon\,dt\right|=$$

$$=\frac{\epsilon|x-x_0|}{|x-x_0|}=\epsilon$$, αν $|x-x_0|<\delta$ και $x\in[a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι

$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)\Rightarrow F'(x_0)=f(x_0)$, $\forall x_0\in[a,b]$.

Πόρισμα: $I\subset\mathbb{R}$ διάστημα, $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν $a\in I$, τότε η $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in I$ είναι αντιπαράγωγος της f και συνεπώς $\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+c$, $\forall x\in I$, $c\in\mathbb{R}$

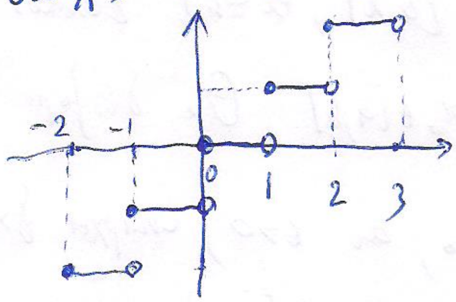
Ορισμός: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ ~~συνεχής~~ συνάρτηση. Η f είναι σχεδόν παντού συνεχής στο I όταν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενικού μέτρου.

Π.χ. η $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $\mathbb{R}$

αφού είναι ασυνεχής σ' ένα μόνο σημείο, το $x=0$.

Η $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} n, & n \leq x < n+1, \ \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού έχει ασυνέχεια μόνο στα σημεία του $\mathbb{Z}$.



Θεώρημα (Lebesgue) Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε,

f ολοκληρώσιμη $\iff$ f σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$.

Πόρισμα: 1) Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη

2) Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε f ολοκληρώσιμη.

(γιατί το σύνολο ασυνεχειών μίας μονότονης συνάρτησης είναι αριθμήσιμο)

Πρόταση: Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και f' ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$,

τότε $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int_0^1 x\,dx$. Αφού η $f(x)=x$ είναι συνεχής μπορούμε να επιλέξουμε μία "βολική" ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ του $[0,1]$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με g' ολοκληρώσιμη. Έστω $[\gamma,\delta]$ το πεδίο τιμών της g. Τότε για κάθε $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ συνεχή έχουμε ότι
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

<u>Απόδειξη</u>: Κατ' αρχάς από τα κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι η $f\circ g$ είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Άρα και η $(f\circ g)g'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ως γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Επίσης η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,\delta]$, άρα και σε κάθε υποδιάστημά του, επειδή είναι συνεχής. Συνεπώς υπάρχουν τα δύο ολοκληρώματα και θα δείξουμε ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Ορίζουμε $F:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ με $F(y)=\int_\gamma^y f(t)\,dt$, $\forall y\in[\gamma,\delta]$.

Από το ΘΘΑΛ, αφού f συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\gamma,\delta]$ και $F'=f$. Από τα κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι η $F\circ g$ είναι παραγωγίσιμη με $(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$, $\forall x\in[a,b]$.
Αφού η $(F\circ g)'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ η πρόταση μας δίνει ότι
$$\int_a^b (F\circ g)' = (F\circ g)(b)-(F\circ g)(a) = F(g(b))-F(g(a)) = \int_\gamma^{g(b)} f - \int_\gamma^{g(a)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$
$$\Rightarrow \int_a^b (f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

<u>Θεώρημα</u> (Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα). Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, 1-1 παραγωγίσιμη με $g'(x)\neq 0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Έστω $[\gamma,\delta]$ το πεδίο τιμών της g. Αν η g' είναι ολοκληρώσιμη, τότε για κάθε $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, έχουμε ότι η $f\circ g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και
$$\int_a^b (f\circ g)|g'| = \int_\gamma^\delta f.$$

[<u>Σημείωση</u>: g συνεχής και 1-1 στο $[a,b] \Rightarrow g$ γνήσια μονότονη στο $[a,b]$. Άρα, $\{\gamma,\delta\}=\{g(a),g(b)\}$.]