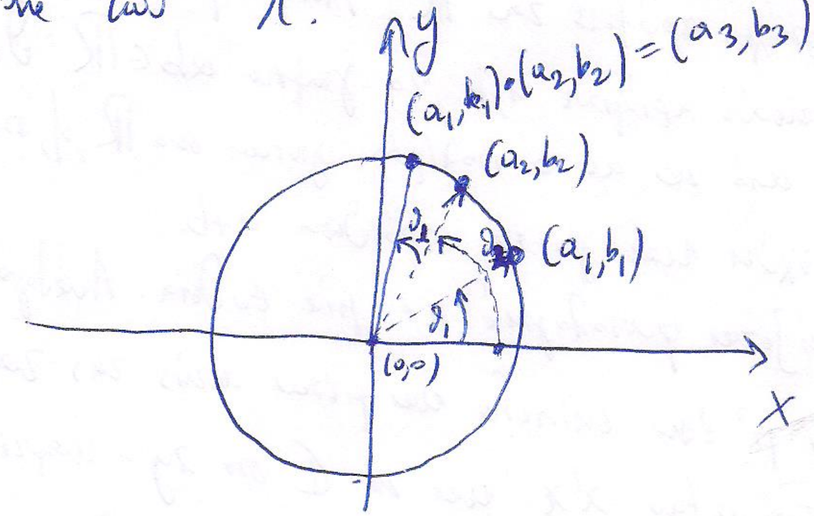
Σύντομη Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Η κατασκευή των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην αναγκαιότητα επίλυσης της εξίσωσης $x^2+1=0$ η οποία βέβαια δεν έχει πραγματικές λύσεις. Η αναζήτηση λύσεων θα γίνει σ' ένα σύνολο μεγαλύτερο από το $\mathbb{R}$. Αυτό το σύνολο συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ και λέγεται σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Το $\mathbb{C}$ είναι υπερσύνολο του $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Το σημαντικότερο ίσως στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι η φανταστική μονάδα, που συμβολίζεται με i, και ικανοποιεί την εξίσωση $i^2=-1$. Άρα η εξίσωση $x^2+1=0$ έχει τουλάχιστο δύο λύσεις που ανήκουν στο $\mathbb{C}$, τις $\pm i$. Το $\mathbb{C}$ είναι εφοδιασμένο, όπως και το $\mathbb{R}$, με δύο πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, οι οποίες επεκτείνουν τις αντίστοιχες πράξεις του $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν πολλαπλασιάσουμε τους πραγματικούς αριθμούς a,b, το γινόμενο $ab \in \mathbb{R}$ θα είναι το ίδιο ανεξάρτητα από το αν ο πολλ/μός γίνεται στο $\mathbb{R}$, ή, στο $\mathbb{C}$ (αφού $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Το ίδιο ισχύει και για την πρόσθεση $a+b$. Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{R}$ ταυτίζεται γεωμετρικά με μία ευθεία. Ανάλογα, το $\mathbb{C}$ θα ταυτιστεί γεωμετρικά μ' ένα επίπεδο και μέσω αυτής της ταύτισης το $\mathbb{R}$ θα αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ και το $\mathbb{C}$ στο xy-καρτεσιανό επίπεδο. Θυμίζουμε εδώ ότι το xy-επίπεδο είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Τα σημεία $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ λέγονται και διανύσματα με συντεταγμένες a και b. Ο άξονας $x'x$ αποτελείται από τα διανύσματα $(a,0)$, με $a \in \mathbb{R}$ και ταυτίζεται γεωμετρικά με το $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε την πρόσθεση διανυσμάτων: $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$, $\forall (a_1,b_1) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$, $\forall a_1,a_2 \in \mathbb{R}$

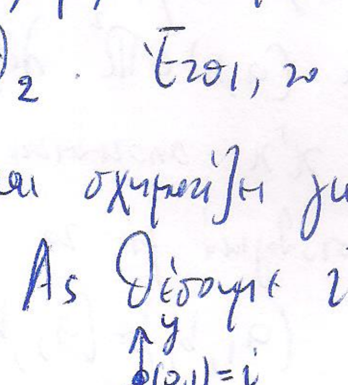
Δηλαδή η πράξη της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}^2$ επεκτείνει την αντίστοιχη του $\mathbb{R}$.

Στο $\mathbb{R}^2$ θα ορίσουμε έναν πολλαπλασιασμό διανυσμάτων, $\circ$, με την εξής ιδιότητα: Αν (a_1,b_1) και (a_2,b_2) ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο κέντρου $(0,0)$ και θ_1 (αντίστοιχα θ_2) είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα (a_1,b_1) (αντίστοιχα το (a_2,b_2)) με το θετικό ημιάξονα των x, τότε το γινόμενο $(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)$ θα είναι το διάνυσμα στο μοναδιαίο κύκλο κέντρου $(0,0)$ που σχηματίζει γωνία $\theta_1+\theta_2$ με το θετικό ημιάξονα των x.



Με άλλα λόγια το $(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)$ προκύπτει στρέφοντας το (a_2,b_2) αντιωρολογιακά κατά γωνία θ_1, ή, ισοδύναμα, στρέφοντας το (a_1,b_1) αντιωρολογιακά κατά γωνία θ_2. Έτσι, το $(a_3,b_3)=(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο και σχηματίζει γωνία $\theta_1+\theta_2$ με το θετικό ημιάξονα των x. Ας θέσουμε $i\equiv(0,1)$. Τότε

$i^2\equiv i\circ i\equiv(-1,0)\equiv -1$



Άρα, $i^2\equiv -1$
(μετά από ταύτιση)

Δηλαδή ταυτίζουμε τον πραγματικό αριθμό -1 με το $(-1,0)$ και το φανταστικό αριθμό i με το $(0,1)$, θα έχουμε $i^2=-1$, όπου $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)$ είναι ο πολ/μός μοναδιαίων διανυσμάτων που εισάγαμε προηγουμένως. Πιο γενικά, αν $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, τότε $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+b(0,1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow (a,b)\equiv(a,0)+bi\equiv a+bi, \quad \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Ορίζουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ως εξής:

$\mathbb{C}=\{a+ib:\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$. Το i είναι ένα σύμβολο. Μπορούμε να πάρουμε $i=(0,1)$. Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$, $a+ib$, λέγονται μιγαδικοί αριθμοί. Έχουμε ότι $a+ib=\gamma+i\delta \Leftrightarrow a=\gamma$ και $b=\delta$. Έπεται ότι η απεικόνιση $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ με $a+ib\mapsto(a,b)$ είναι 1-1 και επί. Είναι η απεικόνιση μέσω της οποίας ταυτίζουμε το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $i\cdot 0=0\in\mathbb{R}$. Τότε $a+i\cdot 0=a\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και η απεικόνιση που στέλνει το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{R}^2$, στέλνει το $\mathbb{R}$ στον άξονα των x: $\{(a,0):\ a\in\mathbb{R}\}$. Επίσης ορίζουμε $i\cdot i=-1\in\mathbb{R}$ και γράφουμε $i^2=-1$. Θα ορίσουμε πρόσθεση και πολ/μό στο σύνολο $\mathbb{C}$. Για τον πολ/μό προς το παρόν ορίσαμε ότι $\boxed{i\cdot 0=0\cdot i=0}$ και $\boxed{i\cdot i\equiv i^2=-1}$, $\boxed{1\cdot i=i\cdot 1=i}$.

Η πρόσθεση μιγαδικών είναι ευκολότερη: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)\equiv a_1+a_2+i(b_1+b_2)$

Για τον πολ/μό $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)$ δύο μιγαδικών, τον εκτελούμε σαν να πολλαπλασιάζαμε πραγματικούς της μορφής $(a_1+tb_1)(a_2+tb_2)$ (a_1,b_1,a_2,b_2,t πραγματικοί) και λαμβάνουμε υπόψη ότι $i\cdot 0=0$ και $i^2=-1$, $\boxed{\text{και } 1\cdot i=i}$ Έτσι, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^4=i^3\cdot i=(-i)(i)=-i^2=-(-1)=1$. $\quad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i=i^3\cdot i^2$

Γενικότερα, $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1(a_2+ib_2)+(ib_1)(a_2+ib_2)=$

$=a_1a_2+a_1(ib_2)+(ib_1)a_2+(ib_1)(ib_2)=a_1a_2+i(a_1b_2)+i(b_1a_2)+i^2(b_1b_2)=$

$=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+(-1)b_1b_2\Longrightarrow$

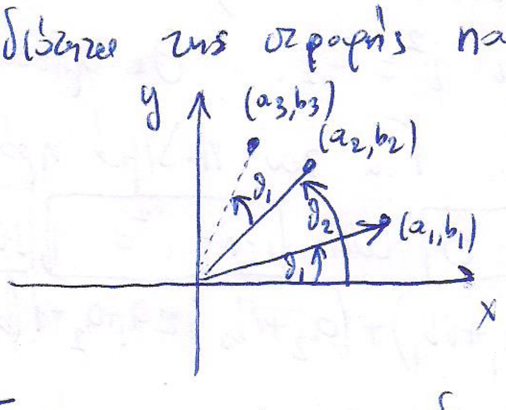
$\Longrightarrow(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$, $\forall a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$

<u>Παρατήρηση</u>: 1) $ib=bi$, $\forall b\in\mathbb{R}$. Επίσης οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού στο $\mathbb{C}$ είναι μεταθετικές, προσεταιριστικές και η πρόσθεση είναι επιμεριστική ως προς τον πολ/μό.

2) $(a+0i)+(b+0\cdot i)=(a+b)+0\cdot i=a+b$. Δηλαδή η πρόσθεση μιγαδικών επεκτείνει την πρόσθεση ~~των~~ πραγματικών.

3) $(a+0i)(b+0\cdot i)=ab+0i=ab$. Δηλαδή ο πολ/μός μιγαδικών επεκτείνει τον πολ/μό πραγματικών.

4) Μπορεί να δειχθεί ότι ο πολ/μός $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)$ έχει τη γεωμετρική ιδιότητα της στροφής που περιγράψαμε στην αρχή της εισαγωγής.



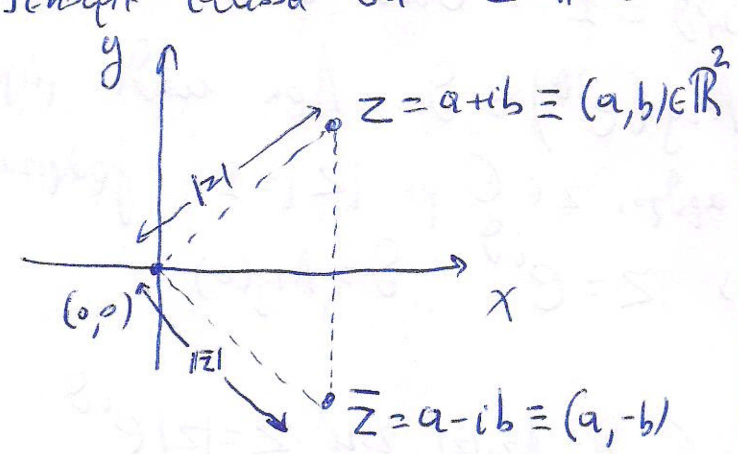
$(a_3,b_3)\equiv a_3+ib_3=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)$ σχηματίζει γωνία $\theta_1+\theta_2$ με το θετικό ημιάξονα των x, όταν οι (a_1,b_1) και (a_2,b_2) σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα.

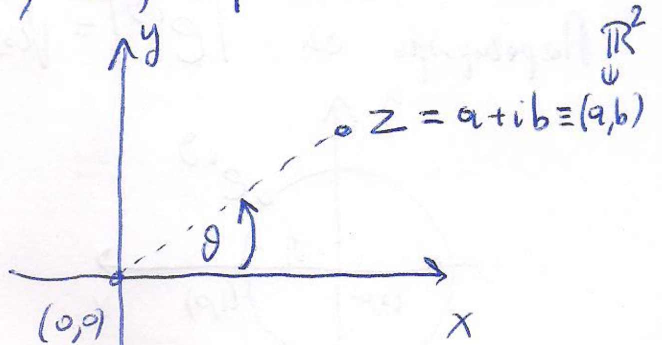
Επίσης, το μήκος του διανύσματος (a_3,b_3) είναι ίσο με το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων (a_1,b_1) και (a_2,b_2): $\sqrt{a_3^2+b_3^2}=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

Συμβολισμοί - Ορολογία στο $\mathbb{C}$: Αν $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$ με $a,b\in\mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $Re(z)=a$, και $Im(z)=b$, και τα καλούμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, του z. Έτσι, $z = Re(z)+i\,Im(z)$ με $Re(z)\in\mathbb{R}$ και $Im(z)\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z)=0 \Leftrightarrow z=Re(z)$.

Αν $z\in\mathbb{C}$ και $Re(z)=0$, δηλαδή $z=i\,Im(z)$, τότε ο z καλείται φανταστικός αριθμός. Με άλλα λόγια οι φανταστικοί αριθμοί είναι πολλαπλάσια της φανταστικής μονάδας i με πραγματικούς αριθμούς. Είναι σαφές τώρα ότι κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται μοναδικά σαν άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού.

Αν $z\in\mathbb{C}$, ορίζουμε την απόλυτη τιμή $|z|$ του z ως $|z| = \sqrt{[Re(z)]^2+[Im(z)]^2}$.
Άρα, αν $z=a+ib$ με $a,b\in\mathbb{R}$, τότε $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ = μήκος του διανύσματος (a,b).
Αν $z\in\mathbb{C}$, ορίζουμε $\bar{z} = Re(z)-i\,Im(z)$, το συζυγή του z. Παρατηρούμε ότι $z\bar{z}=\bar{z}z=[Re(z)+i\,Im(z)][Re(z)-i\,Im(z)]=[Re(z)]^2-i^2[Im(z)]^2=$
$=[Re(z)]^2+[Im(z)]^2 \Rightarrow z\bar{z}=|z|^2$. Επίσης, $|z|=|\bar{z}|$.
Βλέπουμε επίσης ότι $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=\bar{z}$, ενώ, z φανταστικός $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

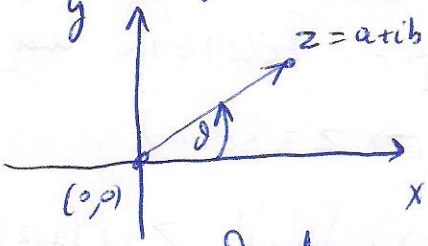




$\theta = Arg(z)$, το κύριο όρισμα του z, $0\leq\theta<2\pi$

Ισχύουν οι ιδιότητες: $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, και $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $z_2\neq 0$.

Τριγωνομετρική αναπαράσταση μιγαδικών: Αν $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, ονομάζουμε κύριο όρισμα του z τη γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα με αρχή το $(0,0)$ και πέρας το (a,b), με το θετικό ημιάξονα των x.



$$\theta = \mathrm{Arg}(z), \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Έτσι, $0 \le \theta = \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Ειδικότερα έχουμε

$\mathrm{Arg}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$ και $z \ge 0$

$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \iff z$ φανταστικός με $\mathrm{Im}(z) > 0$ (δηλ. $z = ib$ με $b > 0$)

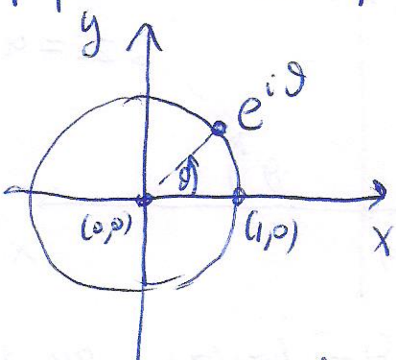
$\mathrm{Arg}(z) = \pi \iff z \in \mathbb{R}$, $z < 0$.

$\mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2} \iff z$ φανταστικός με $\mathrm{Im}(z) < 0$ (δηλ. $z = ib$ με $b < 0$)

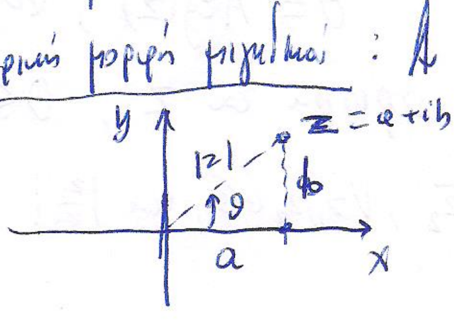
$\mathrm{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \mathrm{Arg}(z)$

Συμβολισμός Euler: Αν $\boxed{\theta \in \mathbb{R}}$, ορίζουμε $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Παρατηρούμε ότι $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Όταν $0 \le \theta < 2\pi$, τότε $\mathrm{Arg}(e^{i\theta}) = \theta$. Άρα κάθε μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, γράφεται ως $z = e^{i\theta}$, $\theta = \mathrm{Arg}(z)$



Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού: Αν $z \in \mathbb{C}$, $\theta = \mathrm{Arg}(z)$, τότε $z = |z| e^{i\theta}$



$z = a+ib \implies a = |z|\cos\theta$, $b = |z|\sin\theta$

$\implies z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\implies \boxed{z = |z| e^{i\theta}}$, $\boxed{\theta = \mathrm{Arg}(z)}$

Τύπος De Moivre: Αν $z \in \mathbb{C}$, $Arg(z)=\vartheta$, και $n \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει ότι

$$z^n = |z|^n e^{in\vartheta},$$

Πόρισμα 1: Η εξίσωση $z^n=1$, $n\in\mathbb{N}$, έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες: $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Πόρισμα 2: Αν $w \in \mathbb{C}$, $Arg(w)=\vartheta$, $n\in\mathbb{N}$, τότε η εξίσωση $z^n=w$ έχει ακριβώς n ρίζες: $z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{2k\pi+\vartheta}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Γενικότερα ισχύει το ακόλουθο σπουδαίο θεώρημα:

Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας: Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $P(z)$ βαθμού $n\in\mathbb{N}$ έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες, όπου κάθε ρίζα προσμετράται τόσες φορές όσο είναι η πολλαπλότητα της ρίζας.

Αυτό σημαίνει ότι το $P(z)$ παραγοντοποιείται (στο $\mathbb{C}$) ως εξής:

$$P(z) = M(z-\rho_1)^{m_1}(z-\rho_2)^{m_2}\cdots(z-\rho_k)^{m_k}, \quad \forall z\in\mathbb{C}, \text{ όπου } k\in\mathbb{N},$$

$m_1,\dots,m_k$ είναι φυσικοί αριθμοί και $\rho_1,\dots,\rho_k$ είναι οι διακεκριμένες (διάφορες ανά δύο) ρίζες του $P(z)$. Ο φυσικός m_j λέγεται πολλαπλότητα της ρίζας ρ_j, $\forall j=1,\dots,k$. Ισχύει ότι $m_1+\dots+m_k=n$ και $M=$ ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $P(z)=Mz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ και $M\neq 0$, $a_0, a_1,\dots,a_{n-1}$ είναι μιγαδικοί.

Εκθετική - Λογαριθμική μιγαδική συνάρτηση: Ορίζουμε $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ ($x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$). Επίσης, αν $z\in\mathbb{C}$ και z δεν ~~ανή~~ ανήκει στο σύνολο $\{z\in\mathbb{R}: z\leq 0\}$, ορίζουμε $\ln(z)=\ln(|z|)+i\,Arg(z)$. Επίσης ορίζονται $\sin(z)$ και $\cos(z)$, $z\in\mathbb{C}$, μέσω της ταυτότητας: $e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$