Σύντομη περιγραφή λύσεων των ασκήσεων του Φυλλαδίου 1

1) (i) $x_1=1$, $\frac{3x_n+2}{x_n+1}=x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επαγωγικά, βλέπουμε εύκολα ότι $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Επίσης, $x_2=\frac{3x_1+2}{x_1+1}=\frac{3+2}{1+1}=\frac{5}{2}>1=x_1$. Δείχνουμε επαγωγικά ότι $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}\nearrow$.

Αν $x_n<x_{n+1}$, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ (επαγωγική υπόθεση), δείχνουμε ότι $x_{n+1}<x_{n+2}$.

Ισοδύναμα, αρκεί $\frac{3x_n+2}{x_n+1}<\frac{3x_{n+1}+2}{x_{n+1}+1}$. Επειδή οι όροι των κλασμάτων αυτών είναι θετικοί, η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την (πολ/ζω χιαστί)

$(3x_n+2)(x_{n+1}+1)<(x_n+1)(3x_{n+1}+2) \iff 3x_nx_{n+1}+3x_n+2x_{n+1}+2<3x_nx_{n+1}+2x_n+3x_{n+1}+2$

$\iff x_n<x_{n+1}$ Αληθής λόγω επαγωγικής υπόθεσης. Άρα, $x_n<x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αν η $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό, τότε το όριό της θα είναι και άνω φράγμα αυτής. Αν λοιπόν $x_n\to x$, με $x\in\mathbb{R}$, τότε και $x_{n+1}\to x$. Άρα, αφού

$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x_n+2}{x_n+1}=\frac{3x+2}{x+1}\Rightarrow x^2+x=3x+2\Rightarrow x^2-2x-2=0$

$\Rightarrow x=\sqrt{3}+1$, ή, $x=1-\sqrt{3}$. Όμως, $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow x=\sqrt{3}+1$. Δηλαδή,

αν η $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό, πρέπει $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}+1$.

Θα δείξουμε ότι $x_n<\sqrt{3}+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, το Αξίωμα Πληρότητας δίνει $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}+1$ (λόγω του παραπάνω υπολογισμού). Δείχνουμε επαγωγικά $x_n<\sqrt{3}+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αν $n=1$, $x_1=1<\sqrt{3}+1$, άρα ισχύει για $n=1$.

Υποθέτουμε ότι $x_n<\sqrt{3}+1$, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, και δείχνουμε ότι $x_{n+1}<\sqrt{3}+1$.

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{3x_n+2}{x_n+1}<\sqrt{3}+1 \iff (3x_n+2)<(x_n+1)(\sqrt{3}+1)$

(γιατί $x_n>0$) $\iff 3x_n+2<x_n\sqrt{3}+x_n+\sqrt{3}+1 \iff 2x_n-\sqrt{3}x_n<\sqrt{3}-1 \overset{2>\sqrt{3}}{\iff} x_n<\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}$

$\iff x_n<\frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}{4-3}=\frac{\sqrt{3}+1}{1}=\sqrt{3}+1$, που είναι αληθής.

Άρα, $x_n<1+\sqrt{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow(x_n)_{n\geq1}^{\infty}\nearrow$ + φραγμένη $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}$, (Αξ. Πλ.)

$\Rightarrow x=\sqrt{3}+1$, λόγω της δουλειάς στην προηγούμενη παράγραφο.

(i) $x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επαγωγικά, $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης, $x_2=\sqrt{2x_1}=\sqrt{2}>x_1$

Επαγωγικά, $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}\uparrow$ : $x_{n+1}<x_{n+2} \Leftrightarrow \sqrt{2x_n}<\sqrt{2x_{n+1}} \Leftrightarrow x_n<x_{n+1}$.

Πάλι, αν $x_n\to x\in\mathbb{R}$, τότε $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_n}=\sqrt{2x} \Rightarrow x^2=2x \Rightarrow x=0$, ή, $x=2$

Αφού $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}\uparrow$ και $x_1>0$, έχουμε $x=2$. Δείχνουμε $x_n<2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επαγωγικά,

$x_{n+1}<2 \Leftrightarrow \sqrt{2x_n}<2 \Leftrightarrow x_n<2$. Άρα, $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$ αύξουσα + φραγμ. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, λόγω τα προηγούμενα υπολογισμού.

(ii) $0<x_1<2$ και $x_{n+1}=\dfrac{6+6x_n}{7+x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έχουμε $x_2=\dfrac{6+6x_1}{7+x_1}$. Ελέγχουμε

αν $x_1\geq x_2$, ή, $x_1\leq x_2$. Έχουμε $x_1\leq x_2 \Leftrightarrow x_1\leq\dfrac{6+6x_1}{7+x_1} \Leftrightarrow x_1(7+x_1)\leq 6+6x_1$

(αφού $x_1>0$) $\Leftrightarrow x_1^2+x_1-6\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq x_1\leq 2$ γιατί οι ρίζες του τριωνύμου

$x^2+x-6=0$ είναι $x=2$, $x=-3$. Από την υπόθεση έχουμε $0<x_1<2$. Άρα,

ικανοποιείται η $-3<x_1<2 \Rightarrow x_1^2+x_1-6<0 \Rightarrow x_1<x_2$.

Δείχνουμε επαγωγικά $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}\uparrow$. Έχουμε $x_{n+1}<x_{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{6+6x_n}{7+x_n}<\dfrac{6+6x_{n+1}}{7+x_{n+1}}$

$\overset{x_n>0,\ x_{n+1}>0}{\Leftrightarrow} 42+6x_{n+1}+42x_n+6x_nx_{n+1}<42+42x_{n+1}+6x_n+6x_nx_{n+1} \Leftrightarrow 36x_n<36x_{n+1} \Leftrightarrow x_n<x_{n+1}$

Αν $x_n\to x\in\mathbb{R}$, τότε $x_{n+1}\to x \Rightarrow x=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+6x_n}{7+x_n}=\dfrac{6+6x}{7+x} \Rightarrow x^2+x-6=0$

$\Rightarrow x=-3$, ή, $x=2$. Αφού $x_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Μένει να δείξουμε ότι $x_n<2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επαγωγικά, $x_n<2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $x_1=1<2$.

$x_{n+1}<2 \Leftrightarrow \dfrac{6+6x_n}{x_n+7}<2 \underset{x_n>0}{\Leftrightarrow} 6+6x_n<2x_n+14 \Leftrightarrow 4x_n<8 \Leftrightarrow x_n<2$.

2) (i) $5^n<2^n+5^n<5^n+5^n=2\cdot5^n \Rightarrow 5<\sqrt[n]{2^n+5^n}<5\sqrt[n]{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\sqrt[n]{2}\to1$ (βασικό όριο)

$\Rightarrow \sqrt[n]{2^n+5^n}\to5$.

(ii) $a_n=\sqrt[n]{3^n+n^2+5n}=3\sqrt[n]{1+\dfrac{n^2}{3^n}+5\cdot\dfrac{n}{3^n}}=3\sqrt[n]{b_n}$, με $b_n=1+\dfrac{n^2}{3^n}+5\cdot\dfrac{n}{3^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Από κριτήριο λόγου $\Rightarrow n^2/3^n\to0$ και $n/3^n\to0$. Άρα, $b_n\to1$.

Από βασικό όριο 4 $\Rightarrow \sqrt[n]{b_n}\to1 \Rightarrow a_n\to3$.

(iii) $\sqrt[n]{7n^2-5n+3}=\sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{7-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\sqrt[n]{7-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\sqrt[n]{n}\to1$ και

$7-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\to7>0 \underset{\text{Όριο 4}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{7-5/n+3/n^2}\to1 \Rightarrow \sqrt[n]{7n^2-5n+3}\to1$

(iv) $\dfrac{n^2+3^n+1}{n^4+3^{n+1}+7} = \dfrac{3^n\left(1+\frac{n^2}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right)}{3^{n+1}\left(1+\frac{n^4}{3^{n+1}}+\frac{7}{3^{n+1}}\right)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\frac{1}{3^n}\to 0$ (όρ. 5). Άρα και $\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{3^n}\to 0$

Επίσης, από κριτήριο λόγου $\Rightarrow \frac{n^2}{3^n}\to 0$ και $\frac{n^4}{3^{n+1}}\to 0$ (Δείξτε τα)

Άρα το όριο ισούται με $1/3$.

(v) $\dfrac{3^n+5^n}{8^n-7^n} = \dfrac{5^n}{8^n}\,\dfrac{1+(3/5)^n}{1-(7/8)^n}\to 0$, γιατί $\left(\frac{5}{8}\right)^n\to 0$, $\left(3/5\right)^n\to 0$, $\left(7/8\right)^n\to 0$ (όρ. 5)

(vi) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow 0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N} \xRightarrow[\text{Sand}]{} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\to 0$, αφού $1/\sqrt{n}\to 0$

(vii) $\left|\dfrac{\sin(3n+1)}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, αφού $|\sin(x)|\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Επίσης, $\frac{1}{n}\to 0$

$\xRightarrow{\text{Sand}} \left|\dfrac{\sin(3n+1)}{n}\right|\to 0 \Rightarrow \dfrac{\sin(3n+1)}{n}\to 0$ (Θεωρία: $|a_n|\to 0 \Leftrightarrow a_n\to 0$)

(viii) $\dfrac{\left|\cos(n!+1/2^n)\right|}{\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. ($|\cos x|\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$). Αφού $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$

από Sandwich (όπως στο vii) $\Rightarrow \dfrac{\cos(n!+1/2^n)}{\sqrt{n}}\to 0$

(ix) $\left|\dfrac{\sin(n)+\cos(n)}{n+\sqrt{n}}\right| \overset{\text{Τριγ. Αν.}}{\le} \dfrac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{n+\sqrt{n}} \le \dfrac{2}{n+\sqrt{n}} \le \dfrac{2}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N} \xRightarrow[\text{Sand}]{2/n\to 0}$

$\dfrac{\sin(n)+\cos(n)}{n+\sqrt{n}}\to 0$ (όπως vii).

(x) $6^n<6^n+\frac{1}{n!}\le 6^n+1<6^n+6^n=2\cdot 6^n$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 6<\sqrt[n]{6^n+1/n!}<6\sqrt[n]{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Αφού $\sqrt[n]{2}\to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{6^n+1/n!}\to 6$, από Θ. Sandwich.

(xi) $2\le 3-\sin^2(n)\le 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$, αφού $0\le\sin^2(n)\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{3-\sin^2(n)}\le\sqrt[n]{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $\sqrt[n]{2}\to 1$ και $\sqrt[n]{3}\to 1$,

έχουμε $\sqrt[n]{3-\sin^2(n)}\to 1$, λόγω Θ. Sandwich.

(xii) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} =$

$= \left[\dfrac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = (n+1)^2 \cdot \dfrac{(2n)!}{[(2n)!][(2n+1)(2n+2)]} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{n+1}{(2n+1)\cdot 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \longrightarrow \dfrac{1}{4} < 1. \Rightarrow a_n \to 0$, από κριτ. λόγου

(xiii) $\dfrac{1}{2} < \underbrace{\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}_{\substack{n \text{ προσθετέοι} \\ 1/2 \text{ ο μεγαλύτερος προσθετέος}}} < n \cdot \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{1/2} < \sqrt[n]{1/2 + (1/2)^2 + \dots + (1/2)^n} < \sqrt[n]{n/2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{1/2}$

$\sqrt[n]{1/2} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{1/2} \to 1$

$\overset{\text{Sand.}}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{1/2 + \dots + (1/2)^n} \longrightarrow 1$.

(*) <u>Ασκηση 10</u> (φυλλάδιο 2): $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$

$= \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow e^{-1}$. Άρα, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1/e < 1$

$\Rightarrow a_n \to 0$, από το κριτήριο λόγου

# Λύσεις ασκήσεων Φυλλάδιο 2

1) $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} \longrightarrow e^{1/3}$, αφού $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} \to e$ ως υπακολουθία της $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n=1}^{\infty}$.

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n\geq 1}^{\infty} \nearrow \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Όμως, $2^n \longrightarrow +\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow +\infty$

3) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \sqrt[n]{b_n}$, με $b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έχουμε ότι $b_n \to e$ γιατί $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n\geq 1}^{\infty}$.

Επίσης, $e>0$. Άρα, $\sqrt[n]{b_n} \to 1$ (βασικό όριο 4) $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$

4) $\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right]^{1/2n} = \sqrt[n]{b_n}$, όπου

$b_n = \left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right]^{1/2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Πάλι, $\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2} \longrightarrow e$ γιατί

η $\left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right]_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n\geq 1}^{\infty}$ (γιατί

$2n^2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $(2n^2)_{n\geq 1}^{\infty} \nearrow$). Άρα, $b_n \longrightarrow \sqrt{e} > 0 \Rightarrow$

$\sqrt[n]{b_n} \longrightarrow 1$ (όριο 4) $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^n \longrightarrow 1$.

5) $1 < \left(n+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \leq (n+n)^{1/n} = (2n)^{1/n} = \sqrt[n]{2n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\, 1}\,\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left(n+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \longrightarrow 1$, λόγω Κ. Sandwich

6) $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n > 2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $2^n \to +\infty \Rightarrow \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \to +\infty$

7) $\sqrt[n]{2} + \frac{1}{n} \to 1+0=1$, αφού $\sqrt[n]{2}\to 1$ (βασικό όριο) και $1/n \to 0$. Αφού $1>0 \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[n]{2}+\frac{1}{n}} \to 1$ (βασικό όριο)

$\Rightarrow \left(\sqrt[n]{2} + 1/n\right)^{1/n} \to 1$.

8) $$\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{1}{n!}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(n!)^k}$$

$$\binom{n}{1}\frac{1}{n!} = \frac{n!}{(1!)(n-1)!}\,\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{(n!)^k} = \frac{n!}{(k!)(n-k)!}\,\frac{1}{(n!)^k} = \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\le 1}\,\frac{1}{(n!)^{k-1}} \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{(n-1)!},\ \forall k\ge 2.$$

Άρα, $\binom{n}{k}\frac{1}{(n!)^k} \le \frac{1}{(n-1)!}$, $\forall k=1,\dots,n$. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(n!)^k} \le n\cdot\frac{1}{(n-1)!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 1 < \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n < \frac{n}{(n-1)!}+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $\frac{n}{(n-1)!} \to 0$ (δείξτε το με κριτήριο λόγου). Από sandwich $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n \to 1$

9) Αφού $x_n \to +\infty \Rightarrow [x_n]+1 \to +\infty$, γιατί $[x_n]+1 > x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow [x_n] \to +\infty$. Έπεται τώρα ότι $\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \to e$ και $\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \to e$. Πράγματι, αν $\epsilon>0$ τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $e-\epsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, $\forall n\ge n_0$ (αφού $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$). Επίσης, $[x_n]\to+\infty \Rightarrow [x_n] > n_0$ για κάθε $n \ge n_1$, όπου $n_1\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο

Άρα, $[x_n]+1>[x_n]>n_0$, $\forall n\geq n_1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} > e-\epsilon$

και $\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} > e-\epsilon$, $\forall n\geq n_1$. Άρα, έχουμε ότι

$$\left|\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}-e\right|<\epsilon \text{ και } \left|\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}-e\right|<\epsilon, \quad \forall n\geq n_1.$$

Το $\epsilon>0$ τυχόν, άρα $\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\to e$ και $\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}\to e$

(Σημείωση: Οι $\left\{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ και $\left\{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν είναι

ακριβώς υπακολουθίες της $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}^{\infty}$ παρόλο που $[x_n]\in\mathbb{N}$,

διότι μπορεί π.χ., $[x_n]=[x_{n+1}]=[x_{n+2}]$.)

Αφού τώρα $x_n\to+\infty \Rightarrow x_n>1$ $\forall n\geq n_2$, ($n_2$ αρκετά μεγάλο)

Άρα, αφού $[x_n]\leq x_n<[x_n]+1 \Rightarrow 1+\frac{1}{1+[x_n]}<1+\frac{1}{x_n}\leq 1+\frac{1}{[x_n]}$

$$\underset{x_n>0}{\Rightarrow} \left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\leq\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{x_n} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{βάσεις}>1}{\Rightarrow} \left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{[x_n]}\leq\left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\leq\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{[x_n]}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}, \quad \forall n\geq n_2$$

Τώρα, $\left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{[x_n]}=\left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{1+[x_n]}\left(1+\frac{1}{1+[x_n]}\right)^{-1}\to e\cdot 1=e$ $([x_n]\to+\infty)$

και $\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}=\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)\to e\cdot 1=e$. Άρα, από

Sandwich $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e$