Ο λογάριθμος ενός θετικού πραγματικού

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε ότι για κάθε $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $e^x=a$. Γνωρίζουμε βέβαια ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $e^x=a$ είναι $x=\ln(a)$. Η δυσκολία της επίλυσης της εξίσωσης $e^x=a$ βρίσκεται στην ύπαρξη της λύσης x μιας και η μοναδικότητα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι η εκθετική συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα, αφού $e>1$. Άρα, αν $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_2-x_1}>1$, από ιδιότητες των δυνάμεων, και συνεπώς $e^{x_2}/e^{x_1}>1 \Rightarrow e^{x_2}>e^{x_1}$. Αν λοιπόν είχαμε δύο λύσεις x_1, x_2 με $e^{x_1}=e^{x_2}=a$, αναγκαία θα είχαμε ότι $x_1=x_2$. Για την ύπαρξη της λύσης x σκεφτόμαστε ως εξής: $e^x=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=a$.

Ας λύσουμε κατ' αρχήν την εξίσωση $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=a$. $(\forall n\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow 1+\frac{x}{n}=\sqrt[n]{a} \Rightarrow x=n(\sqrt[n]{a}-1)$.

Αν $a>0$, ορίζουμε την ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με

$$x_n = n(\sqrt[n]{a}-1), \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό $x\in\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση $e^x=a$.

Αν βέβαια $a=1$, τότε $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Έτσι, $e^0 = 1$, όπως είναι γνωστό.

<u>Πρόταση 1:</u> Αν $a>1$, τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $x_n = (\sqrt[n]{a}-1)n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών.

Έπεται ότι η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι συγκλίνουσα σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$.

<u>Απόδ</u>: Αφού $a>1$, έχουμε $\sqrt[n]{a}-1>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Δηλαδή, η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι κάτω φραγμένη. Θα δείξουμε τώρα ότι $x_n > x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ισοδύναμα, $n(\sqrt[n]{a}-1) > (n+1)(\sqrt[n+1]{a}-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Θέτουμε $t = a^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Τότε, $t>1$ αφού $a>1$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $n(t^{n+1}-1) > (n+1)(t^n-1)$, αφού $t^n = \sqrt[n+1]{a}$ και $t^{n+1} = \sqrt[n]{a}$. Συνεπώς, ισοδύναμα,

δείχνουμε ότι $n(t-1)(1+t+\dots+t^n) > (n+1)(t-1)(1+t+\dots+t^{n-1})$

λόγω του γνωστού τύπου $(x-1)(1+x+\dots+x^{m-1}) = x^m-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall m\in\mathbb{N}$.

Αφού $t>1$, έχουμε ισοδύναμα: $n(1+t+\dots+t^n) > (n+1)(1+t+\dots+t^{n-1})$

$\Leftrightarrow n(1+t+\dots+t^{n-1}) + nt^n > (n+1)(1+t+\dots+t^{n-1})$

$\Leftrightarrow nt^n > 1+t+\dots+t^{n-1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι αληθής

αφού $t^k < t^n$, $\forall k=0,1,\dots,n$, επειδή $t>1$.

Συνεπώς, $(x_n)_{n\geq1}^{\infty} \downarrow$, $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x\in\mathbb{R}$, από Αξ. Πληρότητας

Τώρα δείχνουμε ότι $x>0$ (Αναμενόμενο, αφού $a>1$ και $x=\ln(a)$)

Αν είχαμε $x=0$, τότε $x_n \longrightarrow 0$. Έστω $k\in\mathbb{N}$ τυχόν. Τότε για $\epsilon = 1/k$, θα βρίσκαμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $x_n < \frac{1}{k}$, $\forall n\geq n_0$.

Όμως $a = \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, από τον τρόπο ορισμού της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Άρα, $a \le \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$, $\forall n\ge n_0 \Rightarrow$

$$a \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = e^{1/k} \Rightarrow a\le e^{1/k}, \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a \le \lim_{k\to\infty} e^{1/k} = 1.$$ Άτοπο. Άρα, $x>0$

<u>Πρόταση 2</u>. Αν $a>1$ και $x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $0<x=\lim_{n\to\infty} x_n$, από την Πρόταση 1, τότε $e^x=a$.

<u>Απόδ</u>: Καταρχήν $x_n\longrightarrow x>0$. Άρα, για $\epsilon = x$, βρίσκουμε $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $x_n - x = |x_n-x| < x$, $\forall n\ge n_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_n < 2x, \quad \forall n\ge n_1} \quad (*)$$

Επίσης, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x} \Rightarrow$ Αν $\epsilon>0$, τυχόν, $\exists\, p\in\mathbb{N}$ ώστε:

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall n>p} \quad (**)$$ (Από κριτήριο Cauchy)

Ακόμα έχουμε ότι $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Rightarrow x_n^k \to x^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Άρα, υπάρχει για $\epsilon>0$ τυχόν, $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_n^k - x^k| = x_n^k - x^k < \frac{\epsilon}{2p}$ $\forall n\geq n_2$, $\forall k=1,\dots,p$. Συνεπώς,

$$\boxed{x_n^k - x^k < \frac{\epsilon}{2p}, \quad \forall n\geq n_2, \forall k=1,\dots,p} \quad (***)$$

Εξετάζουμε την ποσότητα $\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|$, $\forall n > n_0$, όπου $n_0=\max\{n_1,n_2,p\}$. Παρατηρούμε ότι $\forall n>n_0$, οι σχέσεις $(*)$, $(**)$, $(***)$, ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Εφαρμόζοντας την (MF), από το διώνυμο Newton, έχουμε:

$$\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\underbrace{\prod_{m=0}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)}_{<1}\Bigg]\frac{x_n^k-x^k}{k!}\right| \underset{\text{Ανισ.}}{\overset{\text{Τριγ.}}{\leq}}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\left(x_n^k-x^k\right) + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{x_n^k-x^k}{k!} \underset{(***)}{<} \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\cdot\frac{\epsilon}{2p} + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{x_n^k-x^k}{k!}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{x_n^k-x^k}{k!} < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{x_n^k}{k!} \underset{(*)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k\geq p+1}^{n}\frac{(2x)^k}{k!}$$

$$\underset{(**)}{<} \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall n>n_0.$$ Αφού $\epsilon>0$ τυχόν,

συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = 0$

Όμως, $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = a$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ενώ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[a - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $a>0$ και $x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\in\mathbb{R}$ και $e^x = a$.

<u>Απόδ</u>: Αν $a>1$, το Πόρισμα έπεται από τις Προτάσεις 1 και 2.

Αν $0<a<1$, τότε αφού $\frac{1}{a}>1$, έχουμε ότι η $(y_n)_{n\geq1}^{\infty}$ με $y_n = n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}-1\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει σε $y>0$ με $e^y = \frac{1}{a}$.

Τότε, $y_n = n\,\dfrac{1-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{-x_n}{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow x_n = -y_n\sqrt[n]{a}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -y$, αφού $\sqrt[n]{a}\to 1$, $\forall a>0$

$$\Rightarrow x<0 \text{ και } e^{-x} = e^{y} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = e^x.$$

<u>Άσκηση</u>: Αν $0<a<1$, δείξτε ότι η $(x_n)_{n\geq1}^{\infty}$, με $\cancel{x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)}$ $x_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία αρνητικών πραγματικών.