ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

<u>Περιεχόμενο μαθήματος</u>: Η μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής ως προς τη σύγκλιση, την παραγώγιση και την ολοκλήρωση. Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $B \subset \mathbb{R}$ τότε κάθε απεικόνιση $f: A \longrightarrow B$ λέγεται πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Ειδικότερα θα εξετάσουμε τις ακόλουθες ενότητες:

1) <u>Ακολουθίες και Σειρές πραγματικών αριθμών.</u>

Οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Πρώτα ορίζεται η έννοια του ορίου για ακολουθίες πραγματικών και μετά επεκτείνεται η έννοια αυτή σε γενικότερες πραγματικές συναρτήσεις.

Οι σειρές πραγματικών αριθμών μας βοηθούν να αναπαραστήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς. Π.χ., αν $0 < x < 1$ έχει δεκαδικό ανάπτυγμα $x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$, όπου οι ακέραιοι $d_1, d_2, d_3 \dots$ σχηματίζουν την ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων του x (άρα, $d_n \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}\ \forall n \in \mathbb{N}$), τότε έχουμε ότι $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Δηλαδή ο x ισούται με το άθροισμα (τα άπειρα σε πλήθος) των αριθμών

$$\frac{d_1}{10}, \frac{d_2}{100}, \frac{d_3}{1000}, \frac{d_4}{10000}, \dots$$

Ειδικότερα θα δούμε ότι

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9/10}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

2) Δυναμοσειρές: Πρόκειται για πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται μέσω σειρών. Μέσω αυτών ορίζονται πολλές γνωστές συναρτήσεις. Π.χ.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) Όριο και συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων.

4) Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης.

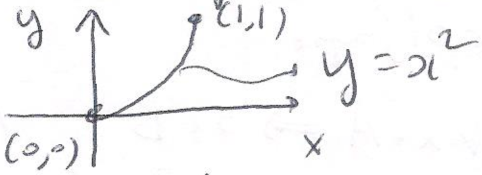
5) Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους. Οι υπερβολικές συναρτήσεις

6) Αόριστο Ολοκλήρωμα και Τεχνικές Ολοκλήρωσης.

Π.χ., αν $f(x) = \dfrac{3x+5}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, πώς μπορούμε να βρούμε $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

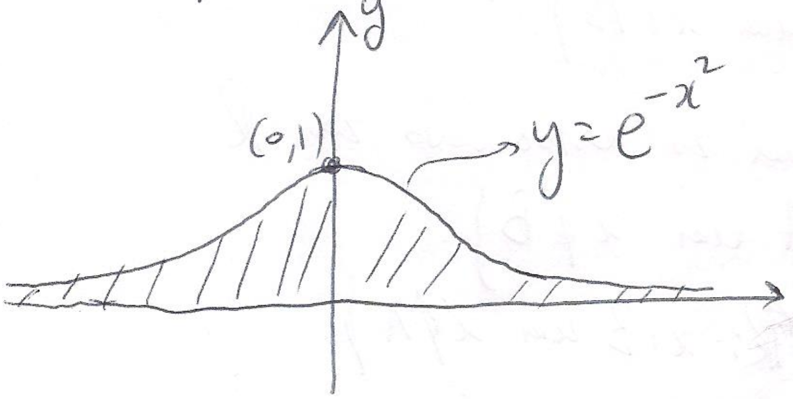
7) <u>Ορισμένο Ολοκλήρωμα και εφαρμογές αυτού σε υπολογισμούς μηκών, εμβαδών και όγκων.</u>

Π.χ. θα δούμε πώς υπολογίζεται το μήκος του παραβολικού τόξου



ως το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx$.

8) <u>Γενικευμένο Ολοκλήρωμα</u>: Π.χ. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ περικλείνει το εμβαδό του <u>μη φραγμένου</u> χωρίου



Θα δούμε ότι αυτό το εμβαδό είναι πεπερασμένο. Το επόμενο εξάμηνο θα το υπολογίσουμε ότι ισούται με $\sqrt{\pi}$.

Το Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών

<u>Γενικά περί συνόλων και συναρτήσεων</u>: Έστω A, B υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε:

1) $A \subset B$ όταν $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B. Γράφουμε $A \subsetneqq B$ όταν το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B. Όταν δηλαδή $A \subset B$ <u>και</u> $A \neq B$.

2) Η ένωση $A \cup B$ των A, B είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A, \text{ ή}, x \in B\}.$$

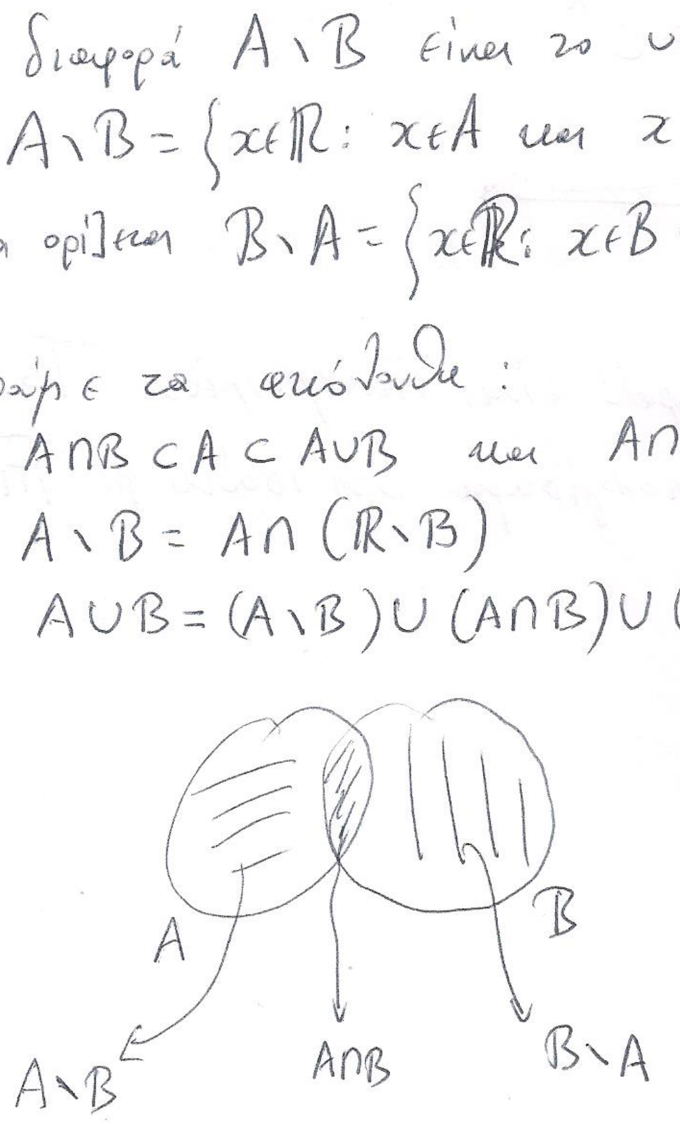
3) Η τομή $A \cap B$ των A, B είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$
$$A \cap B = \{x \in A : x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

4) Η διαφορά $A \setminus B$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$
$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ και } x \notin B\}.$$

Ανάλογα ορίζεται $B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : x \in B \text{ και } x \notin A\}$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ και $A \cap B \subset B \subset A \cup B$
- $A \setminus B = A \cap (\mathbb{R} \setminus B)$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$



Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $B \subset \mathbb{R}$ τότε μία συνάρτηση $f: A \longrightarrow B$ είναι ένας "μηχανισμός" (τύπος, ή, φόρμουλα) μέσω του οποίου σε <u>κάθε</u> σημείο $x \in A$ αντιστοιχούμε ένα μοναδικό σημείο $y \in B$. Γράφουμε τότε ότι $y = f(x)$. Το σύνολο A λέγεται <u>πεδίο ορισμού</u> της f και το σύνολο B καλείται <u>σύνολο αφίξεως</u> της f.

Ονομάζουμε πεδίο τιμών της $f: A \longrightarrow B$ το υποσύνολο

$$f(A) \equiv \{ y \in B : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \} \text{ του } B.$$

Μπορεί $f(A) \subsetneqq B$. Όταν $f(A) = B$ τότε λέμε ότι η f είναι συνάρτηση <u>επί</u>.

<u>Π.χ.</u> Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, είναι συνάρτηση επί. Ενώ η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, <u>δεν</u> είναι επί.

Η συνάρτηση $f: A \longrightarrow B$ λέγεται 1-1 (ή αμφιμονοσήμαντη) όταν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν $a_1, a_2 \in A$ και $f(a_1) = f(a_2)$, τότε $a_1 = a_2$.

Ισοδύναμα, η $f: A \to B$ είναι 1-1 όταν $\forall a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$, έχουμε ότι $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Αν μία συνάρτηση $f: A \to B$ είναι 1-1 και επί τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$ της f ως εξής: $f^{-1}(b) =$ Το μοναδικό $a \in A$ για το οποίο έχουμε ότι $f(a) = b$. Λέμε τότε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

<u>Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων</u>: Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε ορίζουμε:

(i) Άθροισμα των f, g τη συνάρτηση $f+g: A \to \mathbb{R}$ με
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

(ii) Γινόμενο των f, g τη συνάρτηση $fg: A \to \mathbb{R}$ με
$(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in A$.

(iii) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $\lambda f: A \to \mathbb{R}$ με
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in A$.

<u>Σύνθεση Συναρτήσεων</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}$ και $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ συναρτήσεις. Τότε ορίζεται η σύνθεσή τους $g \circ f: A \to \Gamma$ με $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, $\forall x \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Η $f \circ g$ μπορεί να μην ορίζεται

Π.χ: $f:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ με $f(x)=\sqrt{x}$, $\forall x\geq 0$

$g:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=-x$, $\forall x\geq 0$

Τότε ορίζεται η $g\circ f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ με

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=-\sqrt{x}$, $\forall x\geq 0$.

Όμως η $f\circ g$ δεν μπορεί να οριστεί $\forall x\in[0,+\infty)$ αφού η έκφραση $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x)=\sqrt{-x}$ έχει νόημα μόνο για $x=0$.

Επίσης παρατηρούμε ότι ακόμα και αν ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, μπορεί $f\circ g\neq g\circ f$.

Π.χ: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=5$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Τότε, $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(5)=25$, $\forall x\in\mathbb{R}$,

ενώ, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=5$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Σημαντική Ιδιότητα</u>: Αν $f:A\longrightarrow B$ είναι αντιστρέψιμη και $f^{-1}:B\longrightarrow A$ είναι η αντίστροφη της f, τότε

$f\circ f^{-1}:B\longrightarrow B$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση

και $f^{-1}\circ f:A\longrightarrow A$ είναι επίσης η ταυτοτική απεικόνιση.

Φυσικοί, Ακέραιοι, Ρητοί Αριθμοί: Υπενθυμίζεται ότι

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{Z}=\{\pm 1, 0, \pm 2, \pm 3, \dots\}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z} \text{ και } n\in\mathbb{N}\right\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{N}\subsetneqq\mathbb{Z}\subsetneqq\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{N}$ είναι εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολ/μό, το $\mathbb{Z}$ είναι επιπλέον εφοδιασμένο με αφαίρεση ενώ το $\mathbb{Q}$ είναι εφοδιασμένο και με τη διαίρεση με την προϋπόθεση ότι ο διαιρέτης είναι μη μηδενικός. Με άλλα λόγια το $\mathbb{Q}$ έχει πλουσιότερη δομή από τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$. Επίσης και τα τρία αυτά σύνολα είναι εφοδιασμένα με τη φυσιολογική διάταξη. Εδώ το $\mathbb{N}$ υπερτερεί των $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$: Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο. Αντίθετα, τα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> είναι καλά διατεταγμένα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ είναι ισοπληθικά. Δηλαδή αν A, B είναι 2 από τα $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, τότε υπάρχει $\varphi : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$. Λέμε τότε ότι τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα.

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν διαθέτει μία σαφή συνολοθεωρητική αναπαράσταση.

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Π.χ., $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Πράγματι, αν $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, τότε $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε βέβαια να υποθέσουμε ότι το κλάσμα $\frac{m}{n}$ είναι γνήσιο. Δηλαδή ο ΜΚΔ των m, n είναι ο 1. (αλλιώς απλοποιούμε). Τότε $m^2 = 2n^2$. Άρα ο 2 διαιρεί το m^2. Αναγκαία, ο 2 θα διαιρεί το m. (Αν ο m ήταν περιττός, τότε και ο m^2 θα ήταν περιττός. Αφού $m = 2k+1 \Rightarrow m^2 = \underbrace{4k^2+4k}_{\text{άρτιος}} + 1$). Συνεπώς m άρτιος, άρα $m = 2p$ με $p \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $m^2 = 2n^2 \Rightarrow$ $4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow 2$ διαιρεί τον $n^2 \Rightarrow$ 2 διαιρεί τον n (όπως προηγουμένως με τον m). Δηλαδή ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m, n. Άτοπο αφού υποθέσαμε ότι ο ΜΚΔ των m, n είναι ο 1.

Άρα το $\mathbb{R}$ είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathbb{Q}$. Μπορεί να αποδειχθεί (δεν θα το κάνουμε) ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο αλλά υπεραριθμήσιμο. Το υποσύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}$ είναι οι άρρητοι αριθμοί

Το γεγονός ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο προξενεί τη δυσκολία αναπαράστασης των στοιχείων του. Θα δούμε ότι η δυσκολία αυτή θα αρθεί μέσω της έννοιας του ορίου: Κάθε πραγματικός αριθμός θα είναι το όριο μίας ακολουθίας ρητών αριθμών.

$$x = \underbrace{[x]}_{\substack{\text{ακέραιο} \\ \text{μέρος} \\ \text{του } x}}, \underbrace{d_1 d_2 d_3, \ldots}_{\substack{\text{δεκαδικό} \\ \text{μέρος του } x}}$$

Τα δεκαδικά ψηφία $d_1, d_2, d_3, \ldots$ σχηματίζουν μία άπειρη ακολουθία ακεραίων στο $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$.

Αν d_n είναι το n-οστό ψηφίο στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x, τότε ο αριθμός $[x], d_1 \ldots d_n$ είναι ρητός και

$$x = \lim_{n \to \infty} [x], d_1 \ldots d_n$$

Επίσης, $[x], d_1 \ldots d_n = [x] + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots + \frac{d_n}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Γράφουμε ισοδύναμα, $x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$

Αλγεβρικές Πράξεις και διάταξη στο $\mathbb{R}$: Ας θυμηθούμε εδώ ότι το $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με τις 4 πράξεις της αριθμητικής. Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες μεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας και επιμεριστικότητας των πράξεων. Επίσης το $\mathbb{R}$ είναι ολικά διατεταγμένο με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών ($x<y \iff y-x>0$). Οι πράξεις είναι συμβατές με τη διάταξη. Ας θυμηθούμε τα ακόλουθα

1) Αν $a<b$ και $x<y$, τότε $a+x<b+y$.
2) Αν $a<b$ και $\lambda>0$, τότε $\lambda a<\lambda b$.
3) Αν $a<b$ και $\lambda<0$, τότε $\lambda a>\lambda b$.
4) Αν $0<x<y$ και $\lambda>0$, τότε $x^\lambda<y^\lambda$
5) Αν $0<x<y$ και $\lambda<0$, τότε $x^\lambda>y^\lambda$
6) Αν $a>1$ και $x<y$, τότε $a^x<a^y$
7) Αν $0<a<1$ και $x<y$, τότε $a^x>a^y$.

<u>Σημείωση</u>: Οι δυνάμεις a^x με $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται μόνο για $a>0$. Υπενθυμίζονται οι ιδιότητες: $a^{x+y}=a^x a^y$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad \text{και} \quad (a^x)^y=a^{xy}$$

$\forall a>0, \forall x,y\in\mathbb{R}$. $(a^0=1)$.

<u>Απόλυτη Τιμή Πραγματικού</u>: Αν $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$, η απόλυτη τιμή του x.

Έχουμε ότι $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $|\lambda x| = |\lambda||x|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Ανισότητες με απόλυτες τιμές</u>: Αν $\lambda \geq 0$, τότε

$$|x| \leq \lambda \iff -\lambda \leq x \leq \lambda.$$

$$|x| \geq \lambda \iff x \geq \lambda, \text{ ή, } x \leq -\lambda.$$

<u>Τριγωνική Ανισότητα</u>: 1) $|x+y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

2) $|x-y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

3) $|x-y| \geq |x| - |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.