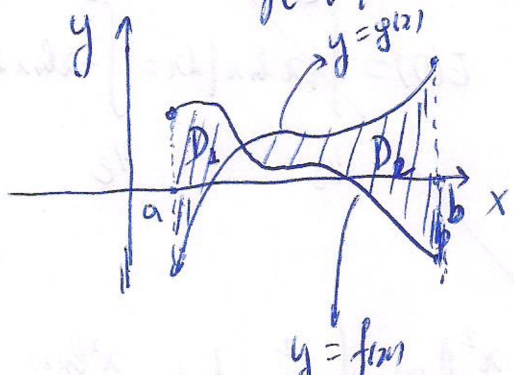
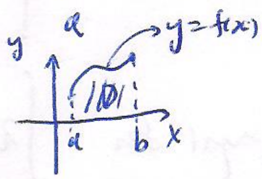
Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

1) Εμβαδό επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα (καμπύλες) δύο συνεχών συναρτήσεων: Αν οι συναρτήσεις $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a<b)$ είναι συνεχείς, θεωρούμε το υποσύνολο (χωρίο) D του επιπέδου που φράσσεται από τα γραφήματα των $y=f(x)$ και $g(x)=y$ με $a\le x\le b$.



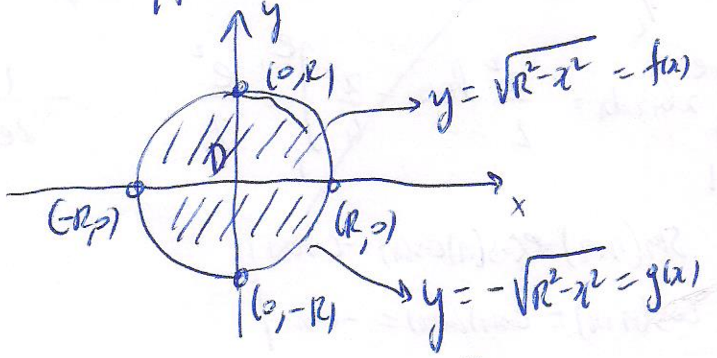
$$D = D_1 \cup D_2$$ και

$$E(D) = \text{εμβαδό του } D = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



Αν $g(x)=0$ και $f(x)\ge 0$,
$$E(D)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Παρατήρηση: (i) Εμβαδό κυκλικού δίσκου ακτίνας $R>0$:



$$E(D)=\int_{-R}^{R}|f(x)-g(x)|\,dx =$$

$$= \int_{-R}^{R}\left|\sqrt{R^2-x^2}-\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)\right|dx = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$ Αλλαγή μεταβλητής: $x=R\sin t$ με $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

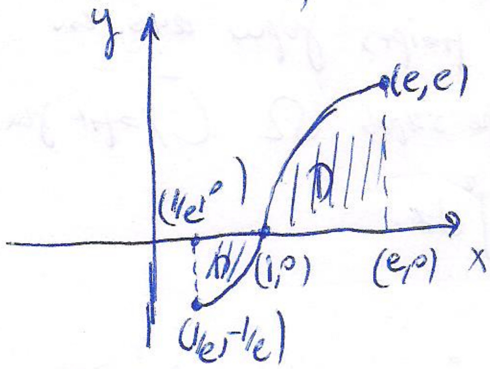
Άρα, $$E(D) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\;R\cos t\,dt = 2R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\cdot\cos t\,dt$$

(γιατί $\cos(t)\ge 0$, όταν $-\frac{\pi}{2}\le t\le \pi/2$). Άρα, $$E(D)=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt = 2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$= 2R^2\cdot\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2R^2\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(\pi)\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(-\pi)\right)\right] = 2R^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\pi R^2$$

2) Εμβαδό ανάμεσα στο γράφημα της $y = x\ln(x)$, $\frac{1}{e} \le x \le e$, και τον άξονα των x:

Αν $f(x) = x\ln(x)$, $x>0$, τότε $f'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1$. Άρα, $f'(x)=0 \iff x = 1/e$ και $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[1/e, e] \Rightarrow f \uparrow$ στο $[1/e, e]$. Επίσης, $f(1)=0$. Άρα, $f(x)\le 0$, $\forall x\in[1/e,1]$, και $f(x)\ge 0$, $\forall x \in [1,e]$. Συνεπώς, $E(\Omega) = \int_{1/e}^{e} |f(x)|dx \Rightarrow$



$$\Rightarrow E(\Omega) = \int_{1/e}^{1} -x\ln(x)dx + \int_{1}^{e} x\ln(x)dx.$$

Έχουμε ότι $\int x\ln(x)dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}+c$, $x>0$.

Άρα, $\int_{1/e}^{1} x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_{1/e}^{1} = -\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2e^2}\ln(1/e) - \frac{1}{4e^2}\right] = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}$

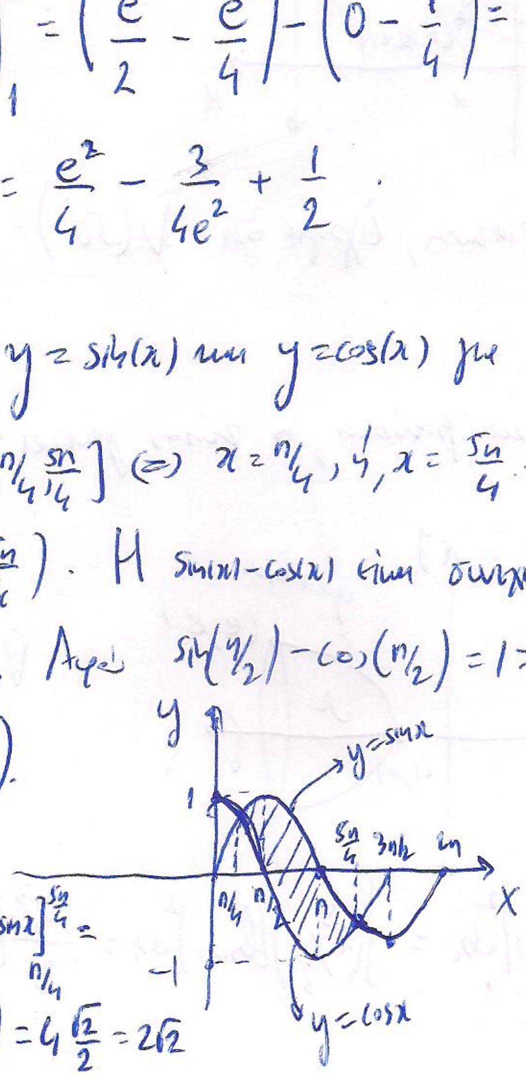
και $\int_{1}^{e} x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e} = \left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right) - \left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

και $E(\Omega) = -\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{4}+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2}+\frac{1}{2}$.

3) Εμβαδό ανάμεσα στα γραφήματα των $y=\sin(x)$ και $y=\cos(x)$ για $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$.

Παρατηρούμε ότι $\sin(x)=\cos(x)$ για $x\in[\pi/4, 5\pi/4] \iff x=\pi/4$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$.

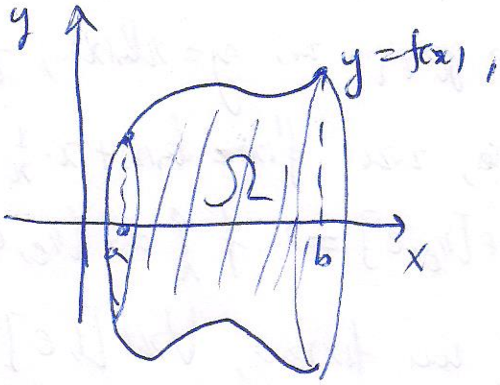
Άρα, $\sin(x)-\cos(x)\ne 0$, $\forall x\in(\pi/4, \frac{5\pi}{4})$. Η $\sin(x)-\cos(x)$ είναι συνεχής, άρα πρέπει να διατηρεί πρόσημο στο $(\pi/4, \frac{5\pi}{4})$. Αφού $\sin(\pi/2)-\cos(\pi/2)=1>0$, έχουμε ότι $\sin(x)-\cos(x)>0$, $\forall x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$.



$$E(\Omega) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}|\sin x - \cos x|dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$$

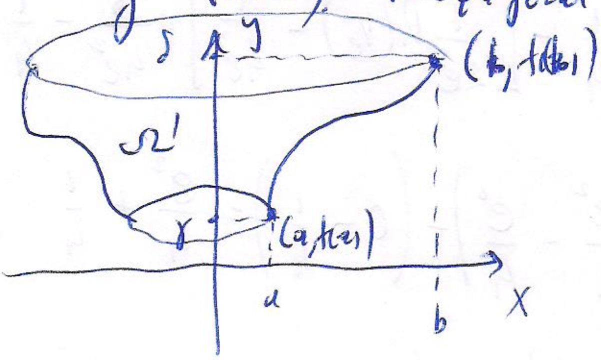
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

2) <u>Όγκος στερεού εκ περιστροφής</u>:



Στρέφουμε την περιοχή $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 360° μοίρες γύρω από τον <u>άξονα των x</u> $(y=0)$ (ΠΡΟΣΟΧΗ). Παράγεται ένα στερεό Ω. Έχουμε για τον όγκο $V(\Omega)$ του Ω, ότι $V(\Omega) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

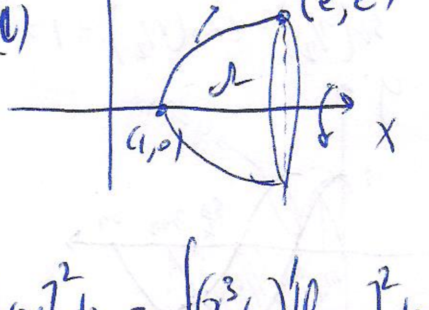
Στρέφουμε την ίδια περιοχή $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 360° μοίρες γύρω από τον άξονα των y $(x=0)$. Παράγεται ένα στερεό Ω'. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, και παραγωγίσιμη. Τότε $f : [a,b] \to [\gamma, \delta] = [f(a), f(b)]$ είναι αντιστρέψιμη. Από την



προηγούμενη περίπτωση, έχουμε ότι $V(\Omega') = \int_\gamma^\delta \pi [f^{-1}(y)]^2 dy \underset{\substack{y = f(x) \\ dy = f'(x)dx}}{\overset{x = f^{-1}(y)}{=\!=\!=}} \int_a^b \pi x^2 f'(x) dx$

Αν η f δεν είναι μονότονη, ο τύπος γίνεται: $V(\Omega') = \pi \int_a^b x^2 |f'(x)| dx$

<u>Παρατήρηση</u>: (i)



$V(\Omega) = \pi \int_1^e x^2 [\ln(x)]^2 dx$. Έχουμε

ότι $\int x^2 [\ln(x)]^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^3}{3}[\ln(x)]^2 - \int \frac{x^3}{3} 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx =$

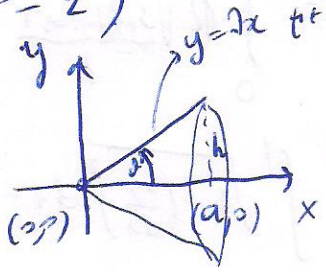
$$= \frac{x^3}{3}[\ln(x)]^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}[\ln(x)]^2 - \frac{2}{3}\int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}[\ln(x)]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] = \frac{x^3}{3}[\ln(x)]^2 - \frac{2x^3}{9}\ln(x) + \frac{2}{27}x^3 + c.$$

Άρα,

$$V(\Omega) = \pi\left[\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{2x^3}{9}\ln(x) + \frac{2}{27}x^3\right]_1^e = \pi\left[\frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{27}e^3 - \frac{2}{27}\right]$$

$$\Rightarrow V(\Omega) = \frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$$

(ii) Όγκος κώνου:

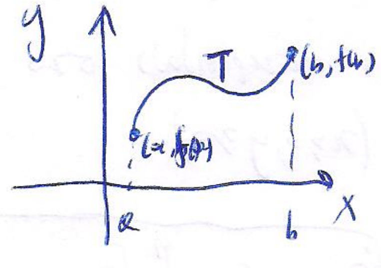


$$V(\Omega) = \pi\int_0^a \lambda^2 x^2\,dx = \frac{\pi\lambda^2}{3}a^3$$

<u>Παρατήρηση</u>: $\lambda = \tan(\theta) = \frac{h}{a} \Rightarrow \lambda a = h =$ ακτίνα βάσης του κώνου

Άρα, $V(\Omega) = \frac{\pi}{3}\lambda^2 a^2 \cdot a = \frac{\pi}{3}h^2 a = \frac{1}{3}\times$ (Εμβαδό βάσης) $\times$ (ύψος)

3) <u>Μήκος καμπύλης</u>: Θεωρούμε την καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, $a \le x \le b$ όπου η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε το μήκος του τόξου T με άκρα στα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δίνεται από το



$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Γενικότερα, αν η καμπύλη δίνεται μέσω παραμετρικών εξισώσεων:

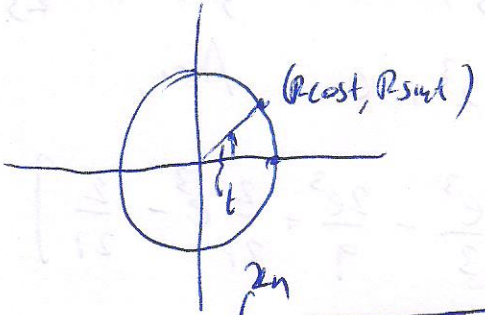
$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\}, \quad a \le t \le b,$$

με f, g συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε

το μήκος της καμπύλης $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$

<u>Παραδείγματα</u>: (i) Μήκος κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$; $R > 0$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου είναι: $\left.\begin{array}{l} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$



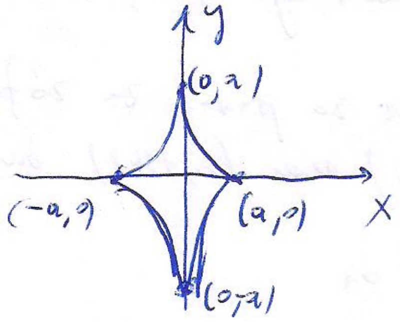
$$L = \text{μήκος} = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(R\cos t)']^2 + [(R\sin t)']^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} R \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}}\, dt = 2\pi R$$

(ii) Μήκος της $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, $= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx =$

$$\xrightarrow[du = \frac{9}{4}dx]{u = 1 + \frac{9x}{4}} \int_1^{\frac{13}{4}} \sqrt{u}\ \frac{4}{9}\, du = \frac{4}{9}\ \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_1^{\frac{13}{4}} = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right]$$

(iii) Μήκος της αστεροειδούς: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$



Παραμετρικές: $\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3(t) \\ y = a\sin^3(t) \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le \pi/2$

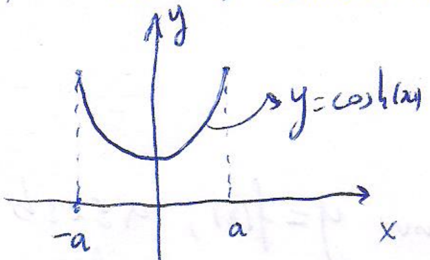
για το τμήμα της αστεροειδούς στο 1ο τεταρτημόριο $(x \ge 0, y \ge 0)$

Λόγω συμμετρίας, μήκος $= 4 \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{[3a\cos^2 t(-\sin t)]^2 + [3a\sin^2 t \cos t]^2}\, dt =$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4(t)\sin^2(t) + 9a^2 \sin^4(t)\cos^2(t)}\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}\, dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t = 12a \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

(iv) Μήκος της αλυσσοειδούς καμπύλης $y=\cosh(x)$, $-a\le x\le a$ $(a>0)$.

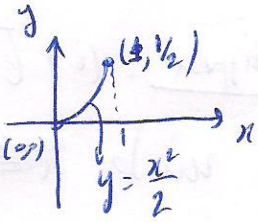


$$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left[(\cosh(x))'\right]^2}\,dx=$$

$$=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2(x)}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\cosh^2(x)}\,dx=\int_{-a}^{a}\cosh(x)\,dx=\sinh(x)\Big]_{-a}^{a}=\sinh(a)-\sinh(-a)=$$

$$=\frac{e^a-e^{-a}}{2}-\frac{e^{-a}-e^{a}}{2}=e^a-e^{-a}$$

(v) Μήκος του παραβολικού τόξου $y=\frac{1}{2}x^2$, $0\le x\le 1$.



$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}2x\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx\ \underset{dx=\cosh(t)dt}{\overset{x=\sinh(t)}{=}}\ \int\sqrt{1+\sinh^2(t)}\cosh(t)\,dt=\int\sqrt{\cosh^2(t)}\cosh(t)\,dt=\int\cosh^2(t)\,dt=\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2dt=$$

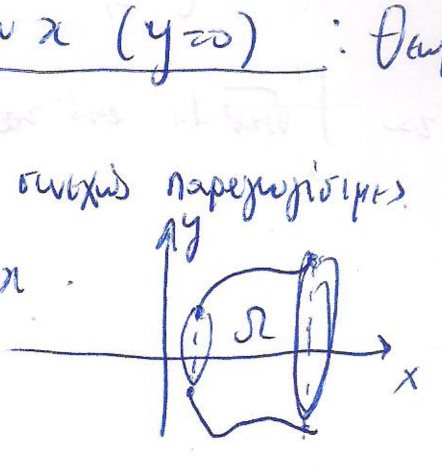
$$=\int\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\,dt=\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{t}{2}+c=\frac{1}{8}(e^t)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{e^t}\right)^2+\frac{1}{2}t+c$$

Όμως, $x=\sinh(t)\Leftrightarrow t=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Άρα, $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+1})^2-\frac{1}{8}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}+$

$+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$. Άρα, $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{8}(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{8}\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

4) Εμβαδό Παράπλευρης Επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής καμπύλης γύρω από τον άξονα των x $(y\ge 0)$: Θεωρούμε την καμπύλη $\left.\begin{array}{l}x=f(t)\\ y=g(t)\end{array}\right\}a\le t\le b$

όπου οι f,g είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Στρέφουμε την καμπύλη 360° γύρω από τον άξονα των x.



Το εμβαδό της παράπλευρης

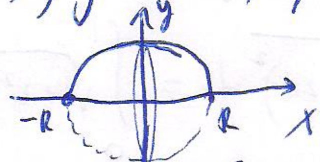
Επιφάνεια Σ το Ω, δίνεται από τον τύπο

$$\Sigma = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη δίνεται από την $y=f(x)$, $a \le x \le b$ με f συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε $x=t$ και $y=f(t)$ με $a \le t \le b$. Άρα

$$\Sigma = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Παράδειγμα: (i) Επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $R>0$: Προκύπτει περιστρέφοντας τον κύκλο $x=R\cos(t)$, $y=R\sin(t)$, $0 \le t \le \pi$ (ημικύκλιο) 360° γύρω από την $y=0$

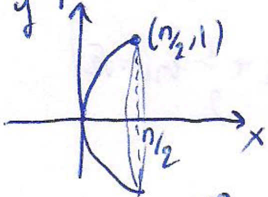


$$\Sigma = 2\pi \int_0^\pi |R\sin(t)| \sqrt{(-R\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2}\, dt$$

$$\underset{0\le t\le\pi}{\overset{\sin(t)\ge 0}{=}} 2\pi \int_0^\pi R\sin(t) \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = 2\pi \int_0^\pi R\sin(t)\sqrt{R^2 \underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}}\, dt = 2\pi \int_0^\pi R^2 \sin(t)\, dt =$$

$$= 2\pi R^2 \Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = 4\pi R^2$$

(ii) Εμβαδόν επιφάνειας εκ περιστροφής της $y=\sin(x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, γύρω από $y=0$



$$\Sigma = 2\pi \int_0^{\pi/2} |\sin(x)| \sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx \overset{u=\cos(x)}{=}$$

$$= 2\pi \int_1^0 -\sqrt{1+u^2}\, du = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du = \pi \left[\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} - \frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right]$$

χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό του $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ από το παράδειγμα 3v).