Κανόνες De L'Hopital

Οι κανόνες De L'Hopital δίνουν ικανές συνθήκες για τον υπολογισμό ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, μέσω των ορίων $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, όταν υφίσταται απροσδιοριστία της μορφής $0/0$, ή, $\frac{\infty}{\infty}$. Για την απόδειξη αυτών των κανόνων θα κάνουμε χρήση αντίστοιχων κανόνων άρσης απροσδιοριστίας για όρια ακολουθιών, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Οι κανόνες αυτοί οφείλονται στον Otto Stoltz.

<u>Λήμμα Stoltz 1</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών με $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Έστω $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ γνησίως μονότονη ακολουθία πραγματικών με $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k_{n+1}}-a_{k_n}}{b_{k_{n+1}}-b_{k_n}}=\lambda,$$

για κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$.

<u>Απόδ</u>: Υποθέτουμε αρχικά ότι $\lambda=0$ και ότι η $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αναγκαία, αφού $b_n\to0$, έχουμε ότι $b_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι $\frac{a_n}{b_n}\not\to0$. Τότε υπάρχει $\epsilon_0>0$ και υπακολουθία $(a_{m_n})_{n\geq1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ έτσι ώστε είτε $\frac{a_{m_n}}{b_{m_n}}\leq-\epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, είτε $\frac{a_{m_n}}{b_{m_n}}\geq\epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Θέτουμε $M=\{m_1<m_2<\dots\}\subset\mathbb{N}$, άπειρο. Επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία φυσικών $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ με $k_n\in M$ και $|a_{k_{n+1}}|<\frac{1}{2}\epsilon_0 b_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Πράγματι, παίρνουμε $m_1=k_1$ και αφού $a_{m_n} \to 0$ και $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι σαφές πως θα επιλέγονται οι δείκτες $(k_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Επειδή τώρα ότι αν $\frac{a_{m_n}}{b_{m_n}} \leq -\epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε ότι $\frac{a_{k_n}}{b_{k_n}} \leq -\epsilon_0$ και $|a_{k_{n+1}}| < \frac{1}{2}\epsilon_0 b_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα έχουμε ότι: $$\frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} = \frac{a_{k_n} - a_{k_{n+1}}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} < \frac{a_{k_n} + \frac{1}{2}\epsilon_0 b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} \leq$$

$$\leq \frac{-\epsilon_0 b_{k_n} + \frac{\epsilon_0}{2} b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} < -\frac{\epsilon_0}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

αφού $\frac{b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} \leq -\frac{\epsilon_0}{2} < 0$

Άτοπο. Πρέπει λοιπόν να έχουμε ότι $\frac{a_{m_n}}{b_{m_n}} \geq \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τώρα έχουμε ότι $$\frac{a_{k_n} - a_{k_{n+1}}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} > \frac{a_{k_n} - \frac{1}{2}\epsilon_0 b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} \geq \frac{\epsilon_0 b_{k_n} - \frac{1}{2}\epsilon_0 b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{b_{k_n}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} > \epsilon_0$$, αφού $k_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα έχουμε ότι

$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{k_n} - a_{k_{n+1}}}{b_{k_n} - b_{k_{n+1}}} \geq \epsilon_0 > 0$. Άτοπο. Άρα πρέπει $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

όταν $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. φθίνουσα και $\lambda = 0$. Όταν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. φθίνουσα, έχουμε ότι για την $(c_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $c_n = a_n - \lambda b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $$\frac{c_{k_{n+1}} - c_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} = \frac{a_{k_{n+1}} - \lambda b_{k_{n+1}} - a_{k_n} + \lambda b_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} = \frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} - \lambda \to 0$$

Πρέπει λοιπόν, από την περίπτωση $\lambda=0$, να έχουμε ότι $\frac{c_n}{b_n}\to 0$ και άρα $\frac{a_n}{b_n}\to 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda=+\infty$ και η $(b_n)_{n\geq1}$ είναι γν. φθίνουσα. Αν $\frac{a_n}{b_n}\not\to+\infty$, θα υπάρχουν $C>0$ και υπακολουθία $(a_{m_n})_{n\geq1}$ της $(a_n)_{n\geq1}$ τέτοια ώστε $\frac{a_{m_n}}{b_{m_n}}<C$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $k_1=m_1$ και επαγωγικά ~~[illegible]~~ επιλέγουμε φυσικούς $k_1<k_2<k_3<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ώστε: $k_n\in M=\{m_1<m_2<m_3<\dots\}$ και $b_{k_{n+1}}<\frac{1}{2}b_{k_n}$ και $|a_{k_{n+1}}|<b_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Η κατασκευή γίνεται εύκολα μιας $b_{m_n}\to0$ και $a_{m_n}\to0$. Είναι σαφές, αφού $k_n\in M$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ότι $\frac{a_{k_n}}{b_{k_n}}<C$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έπεται τώρα ότι

$$\frac{a_{k_n}-a_{k_{n+1}}}{b_{k_n}-b_{k_{n+1}}}<\frac{Cb_{k_n}+b_{k_n}}{b_{k_n}-b_{k_{n+1}}}=(C+1)\frac{b_{k_n}}{b_{k_n}-b_{k_{n+1}}}\leq 2(C+1),\ \forall n\in\mathbb{N},\text{ αφού}$$

$b_{k_n}<2(b_{k_n}-b_{k_{n+1}})$ επειδή $b_{k_{n+1}}<\frac{1}{2}b_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Συνεπώς, $+\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{k_n}-a_{k_{n+1}}}{b_{k_n}-b_{k_{n+1}}}\leq 2(C+1)<+\infty$, άτοπο.

Άρα, $\frac{a_n}{b_n}\to+\infty=\lambda$.

Όταν $\lambda=-\infty$, ~~[illegible]~~ και η $(b_n)_{n\geq1}$ είναι γν. φθίνουσα, θέτουμε $c_n=-a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και έχουμε ότι $\frac{c_{k_{n+1}}-c_{k_n}}{b_{k_{n+1}}-b_{k_n}}=-\frac{a_{k_{n+1}}-a_{k_n}}{b_{k_{n+1}}-b_{k_n}}\to+\infty$

Άρα, από την περίπτωση $\lambda = +\infty$, έπεται ότι $\frac{c_n}{b_n} \to +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-a_n}{b_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to -\infty = \lambda$.

Τέλος, αν η $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γν. αύξουσα και $\frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, $\forall$ υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, τότε θέτουμε $\gamma_n = -b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και η $(\gamma_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γν. φθίνουσα με $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{\gamma_{k_{n+1}} - \gamma_{k_n}} = -\frac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{b_{k_{n+1}} - b_{k_n}} \to -\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

Άρα, $\frac{a_n}{\gamma_n} \to -\lambda \Rightarrow -\frac{a_n}{b_n} \to -\lambda \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \lambda$.

<u>Λήμμα Stoltz 2</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Έστω $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γνησίως μονότονη ακολουθία πραγματικών με $b_n \to \pm\infty$. Υποθέτουμε ότι $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, $\frac{a_n}{b_n} \to \lambda$.

<u>Απόδ</u>: Υποθέτουμε αρχικά ότι $(b_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γν. αύξουσα και ότι $\lambda = 0$. Αναγκαστικά έχουμε ότι $b_n \to +\infty$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0$ και $\frac{1}{b_n} \to 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, και $n_1 > n_0$ ώστε

$\left|\frac{a_{n_0} \pm b_{n_0}\varepsilon}{b_{n+1}}\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$. Τώρα, $\forall n \geq n_1$, έχουμε

$$-\epsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < \epsilon \Rightarrow -\epsilon(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \epsilon(b_{n+1}-b_n), \ \forall n \geq n_0$$

Άρα $$-\epsilon \sum_{k=n_0}^{n}(b_{k+1}-b_k) < \sum_{k=n_0}^{n}(a_{k+1}-a_k) < \epsilon \sum_{k=n_0}^{n}(b_{k+1}-b_k), \ \forall n \geq n_1$$

$$\xRightarrow[\text{Άθροισμα}]{\text{Τηλεσκοπικό}} -\epsilon(b_{n+1}-b_{n_0}) < a_{n+1}-a_{n_0} < \epsilon(b_{n+1}-b_{n_0}), \ \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow -\epsilon + \epsilon\frac{b_{n_0}}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}} < \epsilon - \frac{\epsilon b_{n_0}}{b_{n+1}}, \ \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow -\epsilon + \frac{a_{n_0}+b_{n_0}\epsilon}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < \epsilon + \frac{a_{n_0}-\epsilon b_{n_0}}{b_{n+1}}, \ \forall n \geq n_1$$

$\Rightarrow -2\epsilon < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < 2\epsilon, \ \forall n \geq n_1$. Αφού ϵ τυχόν, έχουμε ότι $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda = +\infty$ και $(b_n)_{n\geq 1}$ γν. αύξουσα. Άρα $b_n \to +\infty$ και υποθέτουμε επίσης ότι $b_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $M > 0$.

Αφού $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > M, \ \forall n \geq n_0$

Αφού $\frac{1}{b_n} \to 0$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, ώστε $\left|\frac{a_{n_0}-b_{n_0}M}{b_{n+1}}\right| < \frac{M}{2}, \ \forall n \geq n_1$

Άρα, $a_{n+1}-a_n > M(b_{n+1}-b_n), \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n}(a_{k+1}-a_k) > M\sum_{k=n_0}^{n}(b_{k+1}-b_k), \ \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_{n_0} > M(b_{n+1}-b_{n_0}), \ \forall n \geq n_1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}} > M - \frac{Mb_{n_0}}{b_{n+1}}$$

$$\Rightarrow M < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{Mb_{n_0}-a_{n_0}}{b_{n+1}} \Rightarrow M < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{M}{2}, \ \forall n \geq n_1.$$

Άρα, $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{M}{2}$, $\forall n \geq n_1$. Αφού $M > 0$ τυχόν, έχουμε ότι

$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \to +\infty$. Άρα και $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

Αν $\lambda = -\infty$ και $(b_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ γν. αύξουσα, τότε $\frac{(-a_{n+1})-(-a_n)}{b_{n+1}-b_n} =$

$= -\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$. Άρα, από την προηγούμενη περίπτωση,

έχουμε $-\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

Τέλος, αν $(b_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ γν. φθίνουσα και $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε

η $(-b_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ γν. αύξουσα και $\frac{a_{n+1}-a_n}{(-b_{n+1})-(-b_n)} \to -\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_n}{-b_n} \to -\lambda \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to +\lambda$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του κανόνα De l'Hopital κάνουμε δύο χρήσιμες παρατηρήσεις πάνω στα όρια των ακολουθιών

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Έστω $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών και $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$. Υποθέτουμε ότι <u>κάθε υπακολουθία</u> $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία $(x_{k_{m_n}})_{n\geq 1}^{\infty}$ με $x_{k_{m_n}} \longrightarrow \lambda$. Τότε $x_n \longrightarrow \lambda$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν $x_n \not\to \lambda$, θα υπάρχει $\epsilon_0>0$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ώστε $|x_{k_n}-\lambda|\geq \epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε όμως, καμία υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο λ. Άτοπο. Αν $\lambda=+\infty$ και $x_n \not\to +\infty$, θα υπάρχει $M>0$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $x_{k_n}<M$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα η $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι άνω φραγμένη και συνεπώς καμία υπακολουθία της δεν μπορεί να συγκλίνει στο $+\infty$. Παρόμοια επιχειρηματολογούμε όταν $\lambda=-\infty$.

2) Έστω $I\subset\mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ άκρο του I. Έστω $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση. Έστω $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν x_0 είναι αριστερό άκρο του I και $f(x_n)\longrightarrow\lambda$ για κάθε <u>γνήσια φθίνουσα</u> ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ στοιχείων του I, $x_n\longrightarrow x_0$, τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda$

(ii) Αν x_0 είναι δεξιό άκρο του I και $f(x_n)\longrightarrow\lambda$ για κάθε <u>γνήσια αύξουσα</u> ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ σημείων του I με $x_n\longrightarrow x_0$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda$.

Πράγματι, για το (i), αν $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x_0$, θεωρούμε μία τυχαία υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Αφού $x_{k_n} \to x_0$ και $x_{k_n} > x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι για κάθε $p \in \mathbb{N}$ υπάρχει $d \in \mathbb{N}$, $d > p$, με $x_{k_p} > x_{k_d}$ (υπάρχουν άπειρα $d \in \mathbb{N}$). Μπορούμε λοιπόν να βρούμε μία υπακολουθία $(x_{k_{m_n}})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ που είναι γνήσια φθίνουσα. Αφού $x_{k_{m_n}} \to x_0$, η υπόθεση δίνει ότι $f(x_{k_{m_n}}) \to \lambda$. Η Παρατήρηση 1 μας δίνει ότι $f(x_n) \to \lambda$, αφού κάθε υπακολουθία της $(f(x_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο λ.

Παρόμοια δείχνουμε το (ii)

<u>1ος Κανόνας De L'Hopital</u>: (Περίπτωση $0/0$). Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε είτε $x_0 \in I$, είτε x_0 άκρο του I. Έστω $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες.

Υποθέτουμε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

(ii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Παρατήρηση: Η υπόθεση (ii), $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$, μας εξασφαλίζει μέσω του Θ. Darboux ότι η g' διατηρεί πρόσημο τόσο αριστερά, όσο και δεξιά του x_0 όταν $x_0\in I$. Αν x_0 άκρο του I, τότε η g' διατηρεί πρόσημο στο I. Έπεται ότι η g είναι γνήσια μονότονη τόσο αριστερά, όσο και δεξιά του x_0 (όχι αναγκαστικά με την ίδια μονοτονία), όταν $x_0\in I$. Αν x_0 άκρο του I, τότε η g θα είναι γνήσια μονότονη στο I. Επειδή $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x)\neq 0$, $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$. Πράγματι, αν η g είναι γν. αύξουσα αριστερά του x_0, τότε $g<0$ αριστερά του x_0. Αν η g είναι γν. ~~αύξουσα~~ φθίνουσα αριστερά του x_0, τότε $g>0$ αριστερά του x_0. Ενώ αν g γν. φθίνουσα δεξιά του x_0, τότε $g<0$ δεξιά του x_0 και αν g γν. αύξουσα δεξιά του x_0, τότε $g>0$ δεξιά του x_0. Κατά συνέπεια η $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι καλά ορισμένη στο $I\setminus\{x_0\}$.

Απόδειξη (Κανόνα De L'Hopital). Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι το x_0 είναι αριστερό άκρο του I. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ γν. φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του I με $x_n\to x_0$. ~~Υποθέτουμε ότι~~ Θα δείξουμε ότι $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\lambda$. Εφαρμόζουμε το 1ο Λήμμα του Stolz. Από το (i) έχουμε ότι $f(x_n)\to 0$ και $g(x_n)\to 0$. Επίσης από (ii) και την Παρατήρηση έχουμε ότι η $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι γνήσια μονότονη. Έστω $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ μια υπακολουθία της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Αφού g γν. μονότονη στο I έχουμε ότι $g(x_{k_n})\neq g(x_{k_{n+1}})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και οι f, g ικανοποιούν τις υποθέσεις του γενικευμένου Θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[x_{k_{n+1}}, x_{k_n}]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα βρίσκουμε $\xi_n\in(x_{k_{n+1}}, x_{k_n})$ με $\frac{f(x_{k_{n+1}})-f(x_{k_n})}{g(x_{k_{n+1}})-g(x_{k_n})}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Αφού $\xi_n \in (x_{k_{n+1}}, x_{k_n})$, δηλαδή, $x_{k_{n+1}} < \xi_n < x_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, το Θ. Sandwich μας δίνει ότι $\xi_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\xi_n \to x_0$. Αφού $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$, από (iii), έχουμε ότι $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \lambda$. Άρα, $\frac{f(x_{k_{n+1}}) - f(x_{k_n})}{g(x_{k_{n+1}}) - g(x_{k_n})} \to \lambda$ για κάθε υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Από το 1ο Λήμμα Stolz συνάγεται ότι $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \lambda$. Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ήταν τυχαία, γν. φθίνουσα ακολουθία στο I με $x_n \downarrow x_0$. Έπεται ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, όταν x_0 είναι αριστερό άκρο του I.

Στην περίπτωση που το x_0 είναι δεξιό άκρο του I επιλέγουμε τυχαία γν. αύξουσα ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του I με $x_n \to x_0$ και επαναλαμβάνουμε ακριβώς το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω για να βρούμε ότι $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \lambda$. Άρα πάλι, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Όταν $x_0 \in I$, γράφουμε $I = I_a \cup I_\delta$ όπου I_a το υποδιάστημα του I που βρίσκεται αριστερά του x_0 και I_δ το υποδιάστημα που βρίσκεται δεξιά του x_0. Το x_0 είναι άκρο των I_a, I_δ. Από τις προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I_a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ και

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I_\delta}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda. \quad \text{Άρα,} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

<u>$2^{ος}$ Κανόνας De l'Hopital</u> (Περίπτωση $^{\text{όχι να}}_{\text{ναι}}/\infty$). Έστω I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε είτε $x_0 \in I$, είτε x_0 άκρο του I. Έστω $f: I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ και $g: I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$

(ii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I\setminus\{x_0\}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Δεν υποτίθεται η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2) Το Θ. Darboux μας εξασφαλίζει, μέσω του (ii), ότι γνήσια μονοτονία της g τόσο αριστερά, όσο και δεξιά του x_0 (όχι απαραίτητα το ίδιο είδος μονοτονίας). Έπεται ότι η g έχει το πολύ μία ρίζα αριστερά του x_0, και το πολύ μία ρίζα δεξιά του x_0. Αν $x_0 \in I$, τότε υπάρχει υποδιάστημα J, περιέχον x_0, του I με $g(x) \neq 0$ $\forall x \in J\setminus\{x_0\}$. Αν x_0 άκρο του I, τότε υπάρχει υποδιάστημα J του I με άκρο στο x_0 ώστε $g(x) \neq 0$, $\forall x \in J$. Έπεται ότι η συνάρτηση $f(x)/g(x)$ είναι καλά ορισμένη καθώς $x \to x_0$.

Απόδειξη (2ου κανόνα De L'Hopital). Υποθέτουμε ότι x_0 είναι αριστερό άκρο του I. Έστω $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ γνήσια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του I με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \lambda$. Θα εφαρμόσουμε το 2ο Λήμμα Stoltz. Παρατηρούμε ότι λόγω του (ii) η $(g(x_n))_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γν. μονότονη (σύμφωνα και με την προηγούμενη Παρατήρηση 2).

Το (i) μας δίνει ότι $g(x_n) \longrightarrow \pm\infty$. Το Θεώρημα μέσης τιμής (γενικευμένο) εφαρμόζεται για τις f, g σε κάθε διάστημα $[x_{n+1}, x_n]$ και δίνει $\xi_n \in (x_{n+1}, x_n)$ ώστε $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $x_{n+1} < \xi_n < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x_0$, το Θ. Sandwich μας δίνει ότι $\xi_n \to x_0$ και $\xi_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα από (iii) συμπεραίνουμε ότι $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \lambda$. Άρα έχουμε ότι

$$\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} \to \lambda.$$

Έτσι, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \lambda$, από το 2ο Stoltz.

Αφού $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ τυχούσα γν. φθίν. ακολουθία στοιχείων του I με $x_n \to x_0$, έπεται ότι $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Οι εναπομείναντες περιπτώσεις, x_0 δεξιό άκρο του I, ή, $x_0 \in I$, αντιμετωπίζονται ακριβώς όπως οι αντίστοιχες περιπτώσεις του 1ου Κανόνα L'Hopital

Παραδείγματα: 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3\ln(x)+x^2}{2\ln(x)-3x^2}$. Περίπτωση $\dfrac{\infty}{\infty}$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

Θέτουμε $f(x)=3\ln(x)+x^2$, $g(x)=2\ln(x)-3x^2$ για $x>0$. Τότε $g'(x)=\dfrac{2}{x}-6x=$

$=\dfrac{2-6x^2}{x}>0$ όταν $x>0$ και $x^2<\dfrac{1}{3}$. Άρα, $g'(x)>0$, $\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{3}{x}+2x}{\frac{2}{x}-6x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3+2x^2}{2-6x^2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{1/\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Πάλι, $\dfrac{\infty}{\infty}$, και

$g'(x)=-\dfrac{1}{2x^{3/2}}<0$, $\forall x>0$, και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2x^{3/2}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)\sqrt{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln(x)+x-1}$

$\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln(x)+1+1}=\dfrac{1}{2}$. Χρειάζεται βέβαια δικαιολόγηση

γιατί η παράσταση $\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\neq 0$, για κάθε $x\neq 1$ με x σε κατάλληλα μικρό διάστημα κέντρου 1. Πράγματι, $\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\le x-1+\dfrac{x-1}{x}=(x-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$

$=\dfrac{x^2-1}{x}<0$, αν $0<x<1$, ενώ, $\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}>0$, αν $x>1$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\pi-2\arctan(x)\right]\ln(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\arctan(x)}{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με

$f(x)=\pi-2\arctan(x)$ και $g(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$. Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$, έχουμε απροσδιοριστία $0/0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1/x}{[\ln(x)]^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x[\ln(x)]^2}{1+x^2}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2[\ln(x)]^2+4x\cdot\frac{\ln(x)}{x}}{2x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2[\ln x]^2 + 4\ln x}{2x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^2 + 2\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{1} =$$

$$= 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 1/x}{1} = 0 .$$ Άρα, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

5) $$\lim_{x\to0^+} [\sin(x)]^x = \lim_{x\to0^+} \left\{ e^{\ln[\sin(x)]} \right\}^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln[\sin(x)]}$$

Υπολογίζουμε το $$\lim_{x\to0^+} x\ln[\sin(x)] = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln[\sin(x)]}{1/x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{+\cos(x)}{\sin(x)}}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x^2\cos(x)}{\sin(x)} = 1\cdot \lim_{x\to0^+} \frac{-x^2}{\sin(x)} = \lim_{x\to0^+}(-x) \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 0\cdot 1 = 0$$

Άρα, $\lim_{x\to0^+} [\sin(x)]^x = e^0 = 1$.

6) $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln[\sin(x)]}{\ln(e^x-1)} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to0^+} \frac{(e^x-1)\cos(x)}{e^x\sin(x)} =$$

$$= 1\cdot \lim_{x\to0^+} \frac{(e^x-1)\cos(x)}{\sin(x)} = \left(\lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sin(x)} \right)\cdot 1 = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sin(x)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1$$

7) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$ Εδώ ο κανόνας De l'Hospital δεν βοηθά. Π.χ., $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x-e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$, επιστρέφουμε στο αρχικό όριο.

8) Το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να υπάρχει αλλά το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ να μην υπάρχει

Π.χ., αν $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

γιατί $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, $\forall x>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

από Sandwich συμπεράσματα. Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{1}$ δεν υπάρχει

γιατί αν $x_n = n\pi$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $x_n \to +\infty$ ενώ $\cos(x_n) = (-1)^n$ και η $\left((-1)^n\right)_{n\geq1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει ούτε σε πραγματικό, ούτε στο $\pm\infty$

9) Τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ μπορεί να υπάρχουν αλλά

να μην είναι ίσα. Π.χ. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{x+1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to0} \frac{x'}{(x+1)'} = 1$

10) Στο παράδειγμα 9) δεν υπάρχει απροσδιοριστία. Μπορεί όμως να έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

και το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ να μην υπάρχει

Π.χ. $f(x) = 2x + \sin(2x)$, $g(x) = e^{\sin(x)}\left[2x + \sin(2x)\right] + 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Έχουμε $f(x) \geq 2x-1$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επίσης, $g(x) \geq e^{-1}(2x-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x > 1/2$ (αφού $\sin(\theta) \geq -1$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$)

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + 2\cos(2x)}{\cos(x)\, e^{\sin(x)}\left[2x + \sin(2x)\right] + e^{\sin(x)}\left[2 + 2\cos(2x)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left[1 + \cos(2x)\right]}{e^{\sin(x)}\left[\cos(x)\left(2x + \sin(2x)\right) + 2\left(1 + \cos(2x)\right)\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 2\cos^2(x)}{e^{\sin(x)}\left[\cos(x)\left(2x + \sin(2x)\right) + 2\cos^2(x)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4\cos^2(x)}{e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\left[2x+\sin(2x)+2\cos(x)\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\cos(x)}{e^{\sin(x)}\left[2x+\sin(2x)+2\cos(x)\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\,\frac{4\cos(x)}{e^{\sin(x)}\left[2+\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{2\cos(x)}{x}\right]} = 0$$

γιατί $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και η συνάρτηση $h(x) = \frac{4\cos(x)}{e^{\sin(x)}\left[2+\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{2\cos(x)}{x}\right]}$

είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα της μορφής $(b,+\infty)$ αφού

$\lim_{x\to+\infty}\left[2+\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{2\cos(x)}{x}\right] = 2$ και $\left|\frac{4\cos(x)}{e^{\sin(x)}}\right| \leq \frac{4}{e^{\sin(x)}} \leq 4e$

Άρα, υπάρχει $b>0$ με $2+\frac{\sin(2x)}{x}+\frac{2\cos(x)}{x} > 1$, $\forall x>b$.

Συνεπώς, $|h(x)| \leq 4e$, $\forall x>b$. Άρα, $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = 0$

Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)/g(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(2x)}{e^{\sin(x)}\left[2x+\sin(2x)\right]+1}$ δεν υπάρχει

γιατί αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = n\pi$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $x_n \to +\infty$

και $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{2n\pi+\sin(2n\pi)}{e^{\sin(n\pi)}\left[2n\pi+\sin(2n\pi)\right]+1} = \frac{2n\pi}{2n\pi+1} \to 1$

ενώ με την $y_n = 2n\pi+\pi/2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε $\sin(y_n)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

και $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \frac{4n\pi+\pi+\sin(4n\pi+\pi)}{e^{\sin(2n\pi+\pi/2)}\left[4n\pi+\pi+\sin(4n\pi+\pi)\right]+1} = \frac{(4n+1)\pi}{e\left[(4n+1)\pi\right]+1} \to \frac{1}{e}$

Αφού $1/e \neq 1$, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

Αυτό που συμβαίνει σε αυτό το παράδειγμα είναι ότι δεν ισχύουν οι υποθέσεις του κανόνα De L'Hospital. Συγκεκριμένα, δεν ισχύει ότι $g'(x)\neq 0$ για κάθε x σε ένα διάστημα με άκρο το $+\infty$. Πράγματι, $g'(x)=e^{\sin(x)}\cos(x)\left[2x+\sin(2x)+2\cos(x)\right], \forall x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς $g'(x)=0$ όταν $\cos(x)=0$. Άρα $g'(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0, \forall n\in\mathbb{N}$. Αφού $2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$, σε κάθε διάστημα με άκρο το $+\infty$ θα βρίσκουμε ρίζες $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ της g'. Η $\frac{f'}{g'}$ ορίζεται στο σύνολο $\left\{x\in\mathbb{R}: x>\frac{3}{2}, \underset{\forall n\in\mathbb{N}}{x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}$

<u>Σημείωση</u>: Στον ορισμό του ορίου συνάρτησης $\lim_{x\to x_0} f(x)$, θεωρούμε ότι το $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ είτε ανήκει σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I, είτε το x_0 είναι άκρο του ανοιχτού διαστήματος I. Επιπλέον, η f ορίζεται στο σύνολο $I\setminus\{x_0\}$. Γενικότερα, ορίζεται το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ όταν η f ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $I\setminus A$, όπου το $A\subseteq I$ αποτελείται από τους όρους μιας ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του I. Όταν $x_0\in I$, θεωρούμε ότι $x_0\in A$ δηλαδή, το x_0 είναι ένας από τους όρους της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Στον ορισμό του ορίου που δώσαμε αρχικά, θεωρήσαμε ότι $a_n=x_0, \forall n\in\mathbb{N}$, όταν $x_0\in I$. Στην περίπτωση κατά την οποία το x_0 είναι άκρο του I, μπορούμε να ορίσουμε την f στο $I\setminus A$, όπου $A=\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$ με $a_n\in I$ και $a_n\to x_0$. Δηλαδή, $f: I\setminus\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sin^2(x)}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}\setminus\{n\pi: n\in\mathbb{N}\}$. Εδώ $a_n=n\pi, \forall n\in\mathbb{N}$, και $A=\{n\pi: n\in\mathbb{N}\}$. Έτσι, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ αφού $\frac{1}{\sin^2(x)}>0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus A$. Συνεπώς, $\frac{x}{\sin^2(x)}\geq x$, αν $x\in\mathbb{R}\setminus A$ με $x>0$ και $\frac{x}{\sin^2(x)}\leq x$, αν $x<0$ με $x\in\mathbb{R}\setminus A$.