Υπερβολικές Συναρτήσεις

Ορισμός: 1) Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο, $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ορίζεται ως

$$\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2) Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο, $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ορίζεται ως

$$\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις μας βοηθάνε στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων στα οποία εμφανίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός τριωνύμου.

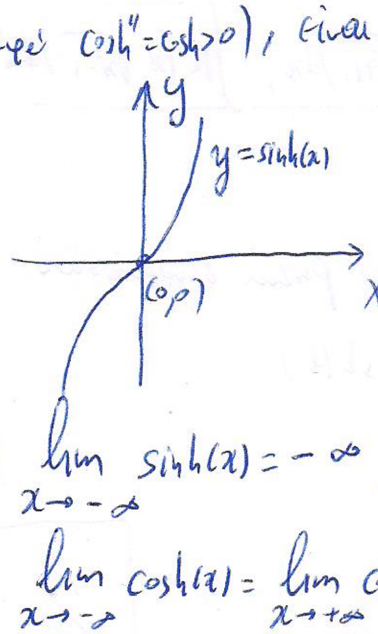
Ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων: 1) Οι $\sinh$, $\cosh$ είναι παραγωγίσιμες και

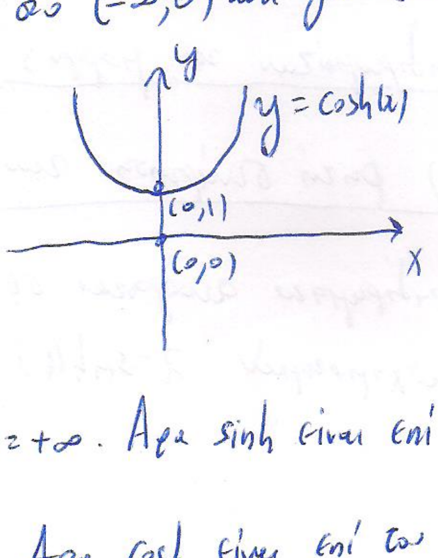
$$(\sinh)'(x)=\frac{e^{x}-(-1)e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$ Επίσης, $$(\cosh)'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2) $\cos^2h(x)-\sin^2h(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, αφού

$$\cos^2h(x)-\sin^2h(x)=\frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{4}-\frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{4}=\frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2)-(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{4}=\frac{4}{4}=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

3) $(\sinh)''(x)=\sinh(x)$, $(\cosh)''(x)=\cosh(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Αφού $(\sinh)'(x)=\cosh(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\sinh$ είναι γνήσια αύξουσα, στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0)$ και άνω στο $(0,+\infty)$ [αφού $(\sinh)''(x)=\sinh(x)>0 \iff x>0$]. Η $\cosh$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ (αφού $\cosh''=\cosh>0$), είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$





Αλυσοειδής καμπύλη

4) $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\sinh(x)=+\infty$. Άρα $\sinh$ είναι επί του $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty}\cosh(x)=\lim_{x\to+\infty}\cosh(x)=+\infty$. Άρα $\cosh$ είναι επί του $[1,+\infty)$

Οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων: Η $\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γν. αύξουσα και επί. Θα βρούμε την αντίστροφή της. Αν $x \in \mathbb{R}$, θα λύσουμε την εξίσωση $x = \sinh(t)$ ως προς t: $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^t - \frac{1}{e^t} = 2x$

$\Leftrightarrow e^{2t} - 2x e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow (e^t)^2 - 2x(e^t) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^t = x \pm \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^t = x + \sqrt{x^2+1}$ (αφού $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ ενώ $e^t > 0$.)

$\Leftrightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Άρα, $(\sinh)^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Η $\cosh: (0,+\infty) \to (1,+\infty)$ είναι γν. αύξουσα και επί. Λύνουμε την εξίσωση $\cosh(t) = x$, ως προς $t>0$, όταν $x>1$. Έχουμε: $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = x \Leftrightarrow e^t + \frac{1}{e^t} = 2x$

$\Leftrightarrow (e^t)^2 - 2x(e^t) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} \Leftrightarrow e^t = x \pm \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^t = x + \sqrt{x^2-1}$ (αφού $x>1 \Rightarrow x - \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{>0} < 1$, ενώ $e^t > 1$ για $t>0$)

$\Leftrightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Άρα, $(\cosh)^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $\forall x > 1$.

Η $-\cosh: (0,+\infty) \to (-\infty,-1)$ είναι γν. φθίνουσα και επί. Η εξίσωση $-\cosh(t) = x$, για $x<-1$, λύνεται μονοσήμαντα ως προς $t>0$, αφού $\cosh(t) = -x \Leftrightarrow t = \ln(-x + \sqrt{x^2-1})$

Άρα, $(-\cosh)^{-1}(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2-1})$, $\forall x < -1$.

Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$, όπου $R(x,y)$ ρητή συνάρτηση των x, y.

Τα παραπάνω ολοκληρώματα ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων μέσω των μετασχηματισμών $x = \sinh(t)$, $x = \pm\cosh(t)$.

Παρατηρήσεις: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$: Θέτουμε $x=\sinh(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Τότε,

$dx=\cosh(t)dt$ και $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\sinh^2(t)+1}=\sqrt{\cosh^2(t)}=\cosh(t)$. Άρα,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\cosh(t)dt}{\cosh(t)}=\int dt=t+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c,\quad x\in\mathbb{R}.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. Πρέπει $x^2-4>0$. Άρα $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Το αόριστο ολοκλήρωμα θα είναι διαφορετικό σε καθένα διάστημα $(-\infty,-2)$, $(2,+\infty)$

Όταν $x\in(2,+\infty)$, θέτουμε $x=2\cosh(t)$ με $t>0$. Τότε $dx=2\sinh(t)dt$ και

$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\cosh^2(t)-4}=2\sqrt{\sinh^2(t)}=2\sinh(t)$ γιατί $t>0\Rightarrow \sinh(t)>0$

Άρα, $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int \frac{2\sinh(t)}{2\sinh(t)}dt=\int dt=t+c=\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)+c=$$

$$=\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)-\ln(2)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)+c,$$

αν $x>2$.

Όταν $x\in(-\infty,-2)$, θέτουμε $x=-2\cosh(t)$ με $t>0$. Τότε $dx=-2\sinh(t)dt$

και $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4\cosh^2(t)-4}=\sqrt{4\sinh^2(t)}=2\sinh(t)$, αφού $t>0$. Άρα, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=$

$$=\int\frac{-2\sinh(t)dt}{2\sinh(t)}=-\int dt=-t+c=-\ln\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)+c=$$

$$=-\ln\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right)+c=-\ln\left(-x+\sqrt{x^2-4}\right)+\ln 2+c=$$

$$=-\ln\left(-x+\sqrt{x^2-4}\right)+c,\quad \text{αν } x<-2.$$

4) Αν $a>0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \underset{\substack{dx=a\cosh(t)\\ (t\in\mathbb{R})}}{\overset{x=a\sinh(t)}{=\!=\!=}} \int \frac{a\cosh(t)dt}{(a^2\sinh^2(t)+a^2)^{3/2}} = \int \frac{a\cosh(t)}{[a^2(1+\sinh^2(t))]^{3/2}}dt =$

$\displaystyle = \int \frac{a\cosh(t)}{a^3[\cosh^2(t)]^{3/2}}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)}dt$ (αφού $\cosh(t)>0$) $\displaystyle = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cosh^2(t)} =$

$\displaystyle = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2} = \frac{4}{a^2}\int \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4}{a^2}\int \frac{dt}{e^{2t}+e^{-2t}+2} \underset{\substack{du=2e^{2t}dt\\ =2u\,dt}}{\overset{u=e^{2t}}{=\!=\!=}}$

$\displaystyle = \frac{4}{a^2}\int \frac{1}{u+\frac{1}{u}+2}\,\frac{du}{2u} = \frac{2}{a^2}\int \frac{u}{u^2+2u+1}\,\frac{1}{u}du = \frac{2}{a^2}\int \frac{du}{(u+1)^2} =$

$\displaystyle = \frac{-2}{a^2}\,\frac{1}{u+1}+c = -\frac{2}{a^2}\,\frac{1}{1+e^{2t}}+c = -\frac{2}{a^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)^2}+c$

αφού $x=a\sinh(t) \Leftrightarrow t=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) \Rightarrow e^{2t}=\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)^2$

Άρα, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{2}{a^2}\,\frac{1}{1+\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}{a^2}}+c = -\frac{2}{a^2+(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}+c$, $x\in\mathbb{R}$

5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx \underset{dx=\cosh(t)dt}{\overset{x=\sinh(t)}{=\!=\!=}} \int \sqrt{1+\sinh^2(t)}\cosh(t)dt = \int \cosh(t)\cosh(t)dt = \int \cosh^2(t)dt =$

$\displaystyle = \int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}dt = \frac{1}{4}\int e^{2t} + \frac{1}{4}\int e^{-2t}dt + \frac{1}{2}\int dt =$

$\displaystyle = \frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+1})^2 - \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

αφού $x=\sinh(t) \Leftrightarrow t=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Άρα, $e^t = x+\sqrt{x^2+1}$

6) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{x^2-1}}dx$ στο διάστημα $(1,+\infty)$. Θέτουμε $x=\cosh(t)$, $t>0$.

Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\cosh^2(t)-1} = \sqrt{\sinh^2(t)} = \sinh(t)$, γιατί $t>0$. Επίσης, $dx = \sinh(t)dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{\cosh(t)+\sinh(t)}{2+\sinh(t)}\sinh(t)\,dt = \int \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}}{2+\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt =$$

$$= \int \frac{e^t(e^t-e^{-t})}{4+e^t-e^{-t}}\,dt \;\underset{e^t dt = du}{\overset{e^t=u}{=}}\; \int \frac{u-\frac{1}{u}}{4+u-\frac{1}{u}}\,du = \int \frac{u^2-1}{u^2+4u-1}\,du =$$

$$= \int \frac{u^2+4u-1-4u}{u^2+4u-1}\,du = \int\left(1-\frac{4u}{u^2+4u-1}\right)du = u - 2\int \frac{2u}{u^2+4u-1}\,du =$$

$$= u - 2\int \frac{2u+4-4}{u^2+4u-1}\,du = u - 2\int\frac{2u+4}{u^2+4u-1}\,du + 8\int\frac{du}{u^2+4u-1} =$$

$= u - 2\ln|u^2+4u-1| + 8\int \frac{du}{u^2+4u-1}$. Παρατηρούμε ότι $u^2+4u-1=(u-\rho_1)(u-\rho_2)$

όπου $\rho_1=-2-\sqrt{5}$ και $\rho_2=\sqrt{5}-2$ οι ρίζες του τριωνύμου u^2+4u-1.

Επειδή $u=e^t$ και $t>0$, έχουμε ότι $u>1>\rho_2>0>\rho_1$. Συνεπώς $u^2+4u-1>0$ όταν $u>1$. Υπολογίζουμε το $\int\frac{du}{u^2+4u-1}$ αναλύοντας σε απλά κλάσματα.

$\frac{1}{u^2+4u-1} = \frac{A}{u-\rho_1}+\frac{B}{u-\rho_2} \Rightarrow \frac{1}{(u-\rho_1)(u-\rho_2)} = \frac{A}{u-\rho_1}+\frac{B}{u-\rho_2} \Rightarrow B=\frac{1}{\rho_2-\rho_1}$ και

$A=-\frac{1}{\rho_2-\rho_1}$. Άρα, αφού $\rho_2-\rho_1=2\sqrt{5} \Rightarrow \int\frac{du}{u^2+4u-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int\frac{du}{u-\rho_2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\int\frac{du}{u-\rho_1} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{u-\rho_2}{u-\rho_1}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{u+2-\sqrt{5}}{u+2+\sqrt{5}}\right)+c$, αφού $u>1$

Τελικά, $\int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{x^2-1}}\,dx = e^t - 2\ln\left(e^{2t}+4e^t-1\right) + \frac{4}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{e^t+2-\sqrt{5}}{e^t+2+\sqrt{5}}\right)+c =$

$$= x+\sqrt{x^2-1} - 2\ln\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+4\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1\right] + \frac{4}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}+2-\sqrt{5}}{x+\sqrt{x^2-1}+2+\sqrt{5}}\right)+c$$

αν $x>1$, αφού $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ όταν $x=\cosh(t)$ με $t>0$

Σημείωση: Αν σ' ένα ολοκλήρωμα εμφανίζεται ρητή έκφραση του τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma$ και της ρίζας $\sqrt{ax^2+bx+\gamma}$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε βέβαια ότι $a\neq 0$ και $\Delta\neq 0$. Γράφουμε $ax^2+bx+\gamma = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{\gamma}{a}\right] =$

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{\gamma}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, όπου $\Delta = b^2-4a\gamma$

Άρα, $ax^2+bx+\gamma = a\left[(x+\lambda)^2\pm\mu^2\right]$, όπου $\lambda=\frac{b}{2a}$, $\mu=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\neq 0$

$\Rightarrow ax^2+bx+\gamma = a\mu^2\left[\left(\frac{x+\lambda}{\mu}\right)^2\pm1\right] = a\mu^2(u^2\pm1)$, αν $u=\frac{x+\lambda}{\mu}$.

$\Rightarrow \int R(x,\sqrt{ax^2+bx+\gamma})\,dx \underset{u=\frac{x+\lambda}{\mu}}{=\!=\!=} \int T(u,\sqrt{a(u^2\pm1)})\,du$, όπου $T(u,v)$ ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αν $a>0$, τότε για το $\int T(u,\sqrt{u^2+1}\sqrt{a})$ θέτουμε $u=\sinh(t)$, ενώ για το $\int T(u,\sqrt{u^2-1}\sqrt{a})$ θέτουμε $u=\cosh(t)$ με $t>0$ αν $u>1$, και $u=-\cosh(t)$ με $t>0$, αν $u<-1$.

Αν $a<0$, τότε για το $\int T(u,\sqrt{a(u^2-1)})\,du$ (αναγκαία $\Delta>0$, αν $a<0$, για να ορίζεται η $\sqrt{ax^2+bx+\gamma}$) έχουμε $\int T(u,\sqrt{(-a)(1-u^2)})\,du = \int T(u,\sqrt{1-u^2}\sqrt{-a})\,du$ και θέτουμε $u=\sin(t)$ με $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, ανάγοντας το ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα ρητής έκφρασης των $\sin t$, $\cos t$.