Ανάλυση ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

Μία συνάρτηση λέγεται ρητή όταν ισούται με το πηλίκο δύο πολυωνύμων. Αν $P_0(x)$, $Q_0(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε η ρητή συνάρτηση $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ ορίζεται στο σύνολο $\{x\in\mathbb{R}: Q_0(x)\neq 0\}$. Αυτό το σύνολο είναι ίσο με μία πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων γιατί η εξίσωση $Q_0(x)=0$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος ριζών. Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}dx$ θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Το $\int \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}dx$ υπολογίζεται σε καθ' ένα από τα διαστήματα που απαρτίζουν το πεδίο ορισμού της $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}$. Αν $deg(P_0)\geq deg(Q_0)$, τότε εκτελώντας τη διαίρεση $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}$, βρίσκουμε ότι $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} = T(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $T(x)$ πολυώνυμο και $deg(P)<deg(Q)$. Άρα $\int\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}dx = \int T(x)dx + \int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$. Αφού το $\int T(x)dx$ υπολογίζεται εύκολα, αρκεί να βρούμε το $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ όταν $deg(P)<deg(Q)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Δηλαδή, δεν έχουν κοινές ρίζες. Αν είχαν κάποιες κοινές ρίζες, τότε μετά από παραγοντοποίηση των $P(x)$, $Q(x)$, θα είχαμε απλοποίηση των παραγόντων που αντιστοιχούσαν σε κοινές ρίζες και συνεπώς, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ με P_1, Q_1 πρώτα μεταξύ τους και $deg(P_1)<deg(Q_1)$. Π.χ., αν $P(x)=(x-\rho)^m P_2(x)$ και $Q(x)=(x-\rho)^k Q_2(x)$ τότε $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-\rho)^m P_2(x)}{(x-\rho)^k Q_2(x)}$. Αν $m\geq k$, τότε $P_1(x)=(x-\rho)^{m-k}P_2(x)$

και $Q_1(x)=Q_2(x)$. Τότε $\deg(P_1)=m-k+\deg(P_2)<\deg(Q_2)=\deg(Q_1)$ αφού $\deg(P)<\deg(Q) \Rightarrow m+\deg(P_2)<k+\deg(Q_2)$. Αν $m<k$, τότε $P_1(x)=P_2(x)$ και $Q_1(x)=(x-\rho)^{k-m}Q_2(x)$. Άρα $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ και η ρ δεν είναι κοινή ρίζα των $P_1(x)$, $Q_1(x)$. Εργαζόμενοι ανάλογα μπορούμε να εξαλείψουμε όλες τις κοινές ρίζες των P, Q. Συνεπώς

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\deg(P_1)<\deg(Q_1)$ και τα $P_1(x)$, $Q_1(x)$ δεν έχουν κοινές πραγματικές ρίζες. Με ανάλογο συλλογισμό απαλείφουμε τους κοινούς παράγοντες των $P(x)$, $Q(x)$ που αντιστοιχούν σε μιγαδικές ρίζες. Άρα, $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ με $P_1(x)$, $Q_1(x)$ πρώτα μεταξύ τους. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι για τον υπολογισμό του $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, ισχύει ότι $\deg(P)<\deg(Q)$ και τα $P(x)$, $Q(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

<u>Θεώρημα</u> (Ανάλυση σε απλά κλάσματα). Αν $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα χωρίς κοινές ρίζες και $\deg(P)<\deg(Q)$, τότε η ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ αναλύεται (με τρόπο μοναδικό, αν δεν λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των προσθετέων) σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Θυμίζουμε ότι υπάρχουν δύο τύποι απλών κλασμάτων:

Απλό κλάσμα 1ου τύπου: $\dfrac{A}{(x-\rho)^m}$, όπου $A\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, $\rho\in\mathbb{R}$.

Απλό κλάσμα 2ου τύπου: $\dfrac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^n}$, όπου $B,\Gamma,b,\gamma\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

και το τριώνυμο $x^2+bx+\gamma$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, $x^2+bx+\gamma>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ αρκεί να γνωρίζουμε τα $\int\frac{dx}{(x-\rho)^m}$ και $\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx$.

Το μεν $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\rho)^m}=\begin{cases}\ln|x-\rho|+c, & m=1\\ \frac{1}{1-m}(x-\rho)^{1-m}, & m>1\end{cases}$. Για το

$$\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^n}=\frac{B}{2}\int\frac{2x+\frac{2\Gamma}{B}}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx+\frac{B}{2}\int\frac{\frac{2\Gamma}{B}-b}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx+\left(\Gamma-\frac{bB}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+bx+\gamma)^n}$$

Το $\displaystyle\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^n}dx\ \underset{du=(2x+b)dx}{\overset{u=x^2+bx+\gamma}{=\!=\!=}}\ \int\frac{du}{u^n}$ υπολογίζεται εύκολα.

$$\text{Το }\int\frac{dx}{(x^2+bx+\gamma)^n}\overset{x^2+bx+\gamma>0}{=\!=\!=}\int\frac{dx}{[(x+\lambda)^2+\mu^2]^n}=\frac{1}{\mu^{2n}}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{x+\lambda}{\mu}\right)^2+1\right]^n}\ \underset{dx=\mu du}{\overset{u=\frac{x+\lambda}{\mu}}{=\!=\!=}}$$

$$=\frac{1}{\mu^{2n}}\int\frac{\mu\,du}{(u^2+1)^n}=\frac{1}{\mu^{2n-1}}\int\frac{du}{(u^2+1)^n}.$$ Το $\displaystyle\int\frac{du}{(u^2+1)^n}$

υπολογίζεται αναδρομικά με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Αν $I_n=\int\frac{du}{(u^2+1)^n}$, τότε $I_1=\text{Arctan}(u)+c$. Αν $n>1$, τότε

$$I_n = \int \frac{du}{(1+u^2)^n} = \int \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^n}\,du = \int \frac{du}{(1+u^2)^{n-1}} + \int u\cdot \frac{-u}{(1+u^2)^n}\,du =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\int u\cdot \frac{-(2n-2)\,u}{(1+u^2)^n}\,du = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\int u\cdot \left[\frac{1}{(1+u^2)^{n-1}}\right]' du$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\left[\frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} - \int \frac{du}{(1+u^2)^{n-1}}\right].$$ Άρα,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{u}{(2n-2)(1+u^2)^{n-1}} - \frac{1}{(2n-2)}I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{u}{(2n-2)(1+u^2)^{n-1}},$$

$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall n > 1.$

<u>Πώς αναλύουμε το $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg(P)<\deg(Q)$, $P(x), Q(x)$ πρώτα μεταξύ τους, σε άθροισμα απλών κλασμάτων.</u>

Το πρώτο βήμα είναι να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο στον παρονομαστή $Q(x)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι αν $d=\deg(Q)$, τότε το $Q(x)$ έχει ακριβώς d το πλήθος μιγαδικές ρίζες, όπου κάθε ρίζα του $Q(x)$ προσμετράται τόσες φορές όση είναι η πολλαπλότητά της. Έτσι, αν $t\in\mathbb{C}$ είναι μία ρίζα του $Q(x)$, η πολλαπλότητα $m(t)$ της t είναι ο μεγαλύτερος φυσικός m για τον οποίο ο $(x-t)^m$ είναι παράγοντας του $Q(x)$. Δηλαδή, $Q(x)\equiv(x-t)^m Q_1(x)$ με $\deg(Q_1)+m = d = \deg(Q)$. Συνεπώς, $\sum_{t=\text{ρίζα του } Q(x)} m(t) = d$.

Συμβολίζουμε με R το σύνολο των πραγματικών ριζών του $Q(x)$ (μπορεί $R=\emptyset$) και με C το σύνολο των μη πραγματικών ριζών του $Q(x)$ (μπορεί $C=\emptyset$). Τότε $R\cup C$ είναι το σύνολο των ριζών του $Q(x)$ και $d=\sum_{p\in R} m(p) + \sum_{z\in C} m(z)$

Επειδή το $Q(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, αν $z \in C$, τότε και $\overline{z} \in C$. Θέτοντας $C_+ = \{z \in C : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ και $C_- = \{z \in C : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ έχουμε ότι $C = C_+ \cup C_-$ και $C_- = \{\overline{z} : z \in C_+\}$

Άρα, $|C_+| = |C_-|$ και $|C| = 2|C_+|$. Δηλαδή το πλήθος των μη πραγματικών ριζών του $Q(x)$ είναι άρτιο. Έχουμε τώρα ότι

$$Q(x) = M \prod_{p \in R} (x-p)^{m(p)} \prod_{z \in C_+} (x-z)^{m(z)} (x-\overline{z})^{m(z)}$$ γιατί

η πολλαπλότητα $m(z)$ μιας ρίζας $z \in C_+$ είναι ίση με την πολλαπλότητα $m(\overline{z})$ της ρίζας $\overline{z}$. Επίσης, $M \in \mathbb{R}$ είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $Q(x)$. Παρατηρούμε ακόμα ότι $(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - (z+\overline{z})x + z\overline{z} = x^2 - [2\mathrm{Re}(z)]x + |z|^2$ είναι τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Γράφουμε $(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 + b_z x + \gamma_z$ με $b_z, \gamma_z \in \mathbb{R}$ και $z \in C_+$. Άρα, $Q(x) = M \prod_{p \in R} (x-p)^{m(p)} \prod_{z \in C_+} (x^2 + b_z x + \gamma_z)^{m(z)}$ είναι

η παραγοντοποίηση του $Q(x)$ σε ανάγωγους (δηλαδή δεν παραγοντοποιούνται) παράγοντες, οι οποίοι είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Βέβαια, αναγκαία, τα τριώνυμα $x^2 + b_z x + \gamma_z$ δεν έχουν πραγματικές ρίζες, $x^2 + b_z x + \gamma_z > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-p)^{m(p)}$, $p \in R$, αντιστοιχούν $m(p)$ το πλήθος απλά κλάσματα της μορφής $\frac{A_{p,1}}{(x-p)}, \frac{A_{p,2}}{(x-p)^2}, \ldots, \frac{A_{p,m(p)}}{(x-p)^{m(p)}}$, όπου

Οι πραγματικοί $\left(A_{p,j}\right)_{j\geq 1}^{m(p)}$ είναι προσδιοριστέοι πραγματικοί.

Σε κάθε παράγοντα της μορφής $\left(x^2+b_z x+\gamma_z\right)^{m(z)}$, $z\in C_+$, αντιστοιχούν $m(z)$ - το πλήθος απλά κλάσματα της μορφής

$$\frac{B_{z,1}x+\Gamma_{z,1}}{x^2+b_z x+\gamma_z},\ \frac{B_{z,2}x+\Gamma_{z,2}}{\left(x^2+b_z x+\gamma_z\right)^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{B_{z,m(z)}x+\Gamma_{z,m(z)}}{\left(x^2+b_z x+\gamma_z\right)^{m(z)}}$$

όπου οι πραγματικοί $\left(B_{z,j}\right)_{j\geq 1}^{m(z)}$ και $\left(\Gamma_{z,j}\right)_{j\geq 1}^{m(z)}$ είναι επίσης προσδιοριστέοι συντελεστές. Το θεώρημα ανάλυσης σε απλά κλάσματα δίνει ότι:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{p\in R}\sum_{j\geq 1}^{m(p)}\frac{A_{p,j}}{(x-p)^{j}}+\sum_{z\in C_+}\sum_{j\geq 1}^{m(z)}\frac{B_{z,j}x+\Gamma_{z,j}}{\left(x^2+b_z x+\gamma_z\right)^{j}}$$

$$=\sum_{p\in R}\sum_{j\geq 1}^{m(p)}\frac{A_{p,j}}{(x-p)^{j}}+\sum_{z\in C_+}\sum_{j\geq 1}^{m(z)}\frac{B_{z,j}x+\Gamma_{z,j}}{\left(x^2+b_z x+\gamma_z\right)^{j}}$$

Πολλ/ντας τα δύο μέλη με $Q(x)$ και απαλείφοντας τους παρονομαστές μεταβαίνουμε σε μία εξίσωση δύο πολυωνύμων. Εξισώνοντας τους συντελεστές βρίσκουμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με $d=\sum_{p\in R} m(p)+2\sum_{z\in C_+} m(z)$ αγνώστους $\left(A_{p,j}\right)_{j\geq 1}^{m(p)}$, $(p\in R)$, και $\left(B_{z,j}\right)_{j\geq 1}^{m(z)}$ και $\left(\Gamma_{z,j}\right)_{j\geq 1}^{m(z)}$, $(z\in C_+)$.

Το σύστημα αυτό θα επιλύεται πάντοτε μονοσήμαντα προσδιορίζοντας τους άγνωστους συντελεστές των απλών κλασμάτων. Αναλυτικά ολοκληρώνοντας κάθε απλό κλάσμα της ανάλυσης και προσθέτοντας τα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στον υπολογισμό του $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Παραδείγματα: 1) $\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$. Αναλύουμε το $\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$,

$\forall x \neq 1, -3$. Άρα, $\frac{x}{x+3} = A + B\,\frac{x-1}{x+3}$, $\forall x \neq -3 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+3} = A + B \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+3}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = A + 0 \Rightarrow \boxed{A = 1/4}$. Επίσης, $\frac{x}{x-1} = A\cdot\frac{x+3}{x-1} + B$, $\forall x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to -3} \frac{x}{x-1} = A\cdot 0 + B \Rightarrow \boxed{B = 3/4}$. Άρα, $\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+3} =$

$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| + c$, $\forall x \in I$, όπου I οποιοδήποτε από τα διαστήματα

$(-\infty, -3), (-3, 1), (1, +\infty)$.

2) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$. Αναλύουμε το $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x+1}$, $\forall x \neq 1, -1$.

$\Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} = A\,\frac{x+1}{x-1} + \frac{B(x+1)}{(x-1)^2} + \Gamma$, $\forall x \neq 1 \xRightarrow{x\to -1} \frac{-1}{4} = 0 + 0 + \Gamma \Rightarrow \boxed{\Gamma = -1/4}$

Επίσης, $\frac{x}{x+1} = A(x-1) + B + \Gamma\,\frac{(x-1)^2}{x+1}$, $\forall x \neq -1 \xRightarrow{x\to 1} \boxed{B = \frac{1}{2}}$

Θέτοντας $x=0$ στην αρχική $\Rightarrow 0 = \frac{A}{-1} + \frac{B}{1^2} + \Gamma \Rightarrow A = B + \Gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1/4$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$. Άρα, $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\int\frac{dx}{x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c$,

$\forall x \in I$, όπου I οποιοδήποτε από τα διαστήματα $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.

3) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$. Αναλύουμε την $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{x-3}$,

$\forall x \neq 1, -2, 3$. Άρα, $A = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{-6} \Rightarrow \boxed{A = -1/6}$.

$B = \lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-5}{(-3)(-5)} \Rightarrow \boxed{B = -1/3}$.

$\Gamma = \lim_{x\to 3} \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{2\cdot 5} \Rightarrow \boxed{\Gamma = 1/2}$. Συνεπώς έχουμε:

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c$$

$\forall x \in I$, όπου I καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$, $(1,3)$, $(3,+\infty)$

4) $\int \frac{x+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$, αναλύουμε το $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\Gamma}{(x+1)^3} + \frac{\Delta}{x-2}$,

$\forall x \neq -1, 2$. Άρα, $\Delta = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{4}{27} \Rightarrow \boxed{\Delta = 4/27}$.

$\Gamma = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \boxed{\Gamma = -1/3}$. Τώρα, πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της αρχικής

επίσης με $x+1$: $\frac{x+2}{(x+1)^2(x-2)} = A + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} + \frac{\Delta(x+1)}{x-2}$, $\forall x \neq -1, 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{(x+1)^2(x-2)} = A + B\cdot 0 + \Gamma\cdot 0 + \Delta\cdot 1 \Rightarrow 0 = A+\Delta \Rightarrow A = -\Delta = -4/27$

$\Rightarrow \boxed{A = -4/27}$. Τέλος, θέτουμε $x=0$ στην αρχική

λαμβάνουμε: $\frac{2}{-2} = A+B+\Gamma - \frac{\Delta}{2} \Rightarrow -1 = -\frac{4}{27} + B + \frac{-1}{3} - \frac{2}{27} = B - \frac{1}{3} - \frac{6}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{B = -4/9}$. Άρα, $\int f(x)dx = -\frac{4}{27}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{4}{9}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^3} +$

$+ \frac{4}{27}\int\frac{dx}{x-2} \Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{4}{27}\ln|x+1| + \frac{4}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{4}{27}\ln|x-2| + C =$

$= \frac{4}{27}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{4}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{6(x+1)^2} + C$, $\forall x \in I$, όπου I καθένα από

τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, $(2,+\infty)$

5) $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$. Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει αρνητική διακρί-

νουσα και συνεπώς έχει μιγαδικές ρίζες: $\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Συνεπώς αναλύουμε την $f(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}$, $\forall x \neq 1$.

$\Rightarrow A = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1} = 1/3 \Rightarrow \boxed{A = 1/3}$

Πολ/ζουμε τα 2 μέλη της αρχικής με x: $\frac{x}{x^3-1} = A\cdot\frac{x}{x-1} + \frac{Bx^2+\Gamma x}{x^2+x+1}, \forall x\neq 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3-1} = A\cdot 1 + B \Rightarrow 0 = A+B \Rightarrow B=-A=-1/3 \Rightarrow \boxed{B=\frac{-1}{3}}$

Επίσης, η αρχική για $x=0 \Rightarrow -1 = -A+\Gamma \Rightarrow \Gamma = A-1 = -2/3 \Rightarrow \boxed{\Gamma=-2/3}$

Παρατήρηση: Μπορούμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε τα B, Γ ως εξής:

Γράφουμε $x^2+x+1=(x-z)(x-\bar z)$, όπου $z=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}$ και $\bar z = \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt3}{2}$ είναι οι δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες του x^2+x+1. Τότε έχουμε ότι

$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}$, $\forall x\in\mathbb{C}$ με $x\neq z,\bar z,1$. Άρα,

$\frac{1}{(x-1)(x-z)(x-\bar z)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{(x-z)(x-\bar z)}$, $\forall x\in\mathbb{C}$, $x\neq z,\bar z,1$.

$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x-\bar z)} = \frac{A}{(x-1)}(x-z)+\frac{Bx+\Gamma}{x-\bar z}$, $\forall x\in\mathbb{C}$, $x\neq \bar z,1$.

Για $x=z \Rightarrow \frac{1}{(z-1)(z-\bar z)} = 0 + \frac{Bz+\Gamma}{z-\bar z} \Rightarrow \frac{1}{z-1} = Bz+\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 1=(z-1)(Bz+\Gamma)=Bz^2+\Gamma z - Bz - \Gamma = B\left(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)^2+\Gamma\left(-\frac12+\frac{i\sqrt3}{2}\right) - B\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt3}{2}\right)-\Gamma$

$\Rightarrow 1 = B\left(\frac14 + \frac34 i^2 - \frac{i\sqrt3}{2}\right) - \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma i\sqrt3}{2} + \frac{B}{2} - \frac{Bi\sqrt3}{2} - \Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = B\left(\frac14-\frac34-\frac{i\sqrt3}{2}\right) - \frac{\Gamma}{2} - \frac{\Gamma i \sqrt3}{2} + \frac B2 - \frac{Bi\sqrt3}{2} - \Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = -\frac B2 - \frac{Bi\sqrt3}{2} - \frac{Bi\sqrt3}{2} - \frac{\Gamma i\sqrt3}{2} - \frac{3\Gamma}{2} + \frac B2 = -Bi\sqrt3 - \frac{\Gamma i\sqrt3}{2} - \frac{3\Gamma}{2}$

$\Rightarrow 1 = \left(-B-\frac\Gamma2\right)\sqrt3\, i - \frac{3\Gamma}{2} \Rightarrow -\frac{3\Gamma}{2}=1$ και $\left(-B-\frac\Gamma2\right)\sqrt3=0$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma=-2/3}$ και $-B-\frac\Gamma2=0\Rightarrow B=-\frac\Gamma2 \Rightarrow \boxed{B=-1/3}$

Τελικά, $\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac13\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-\frac13 x - \frac23}{x^2+x+1}dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$ Υπολογίζουμε το

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1} \qquad \frac{x+\frac{1}{2} = t\frac{\sqrt{3}}{2}}{dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}(t) + C = \frac{2}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Άρα, $$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad \forall x \in I$$

όπου I καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$.

6) $\int \frac{x^2+4}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$. Αναλύουμε $f(x) = \frac{x^2+4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+1}$,

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$. Πολ/με με $(x-1)^2$ τα δύο μέλη της εξίσωσης και παίρνουμε όριο για $x\to 1$, έχουμε ότι $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x^2+1} = \lim_{x\to 1} A(x-1) + B + \lim_{x\to 1}\frac{(\Gamma x+\Delta)(x-1)^2}{x^2+1}$

$\Rightarrow \boxed{B = 5/2}$. Οι ρίζες του x^2+1 είναι μιγαδικές, οι $i, -i$. Πολ/με τα δύο μέλη της αρχικής με $x-i$ και έχουμε: $\frac{x^2+4}{(x-1)^2(x+i)} = \frac{A(x-i)}{x-1} + \frac{B(x-i)}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x+i}$, $\forall x\in\mathbb{C}$, $x\neq 1,-i$. Άρα, για $x=i$ παίρνουμε:

$$\frac{i^2+4}{(i-1)^2(i+i)} = 0+0+\frac{\Gamma i+\Delta}{i+i} \Rightarrow \frac{-1+4}{(i-1)^2\,2i} = \frac{\Gamma i+\Delta}{2i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +3 = (\Gamma i+\Delta)(i-1)^2 = (\Gamma i+\Delta)(i^2-2i+1) = (\Gamma i+\Delta)(-1-2i+1) = -2i(\Gamma i+\Delta)$$

$$\Rightarrow +3 = -2\Gamma i^2 - 2\Delta i \Rightarrow +3 = 2\Gamma - 2\Delta i \Rightarrow \Delta = 0,\ +3 = 2\Gamma \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma = +3/2}$, $\boxed{\Delta = 0}$. Η αρχική για $x=0 \Rightarrow \frac{4}{1} = -A+B+\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow B = A+4 \Rightarrow \boxed{A = -3/2}$

Άρα, $\int f(x)dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{3}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} =$

$= -\frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \frac{3}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx = -\frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + C,$

$\forall x \in I$, όπου $I = (-\infty, 1)$, ή, $I = (1, +\infty)$

7) $\int\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$. Αναλύουμε την $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} + \frac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$. Καταρχήν, $A = \lim_{x\to -1}\frac{x+2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$. Επίσης, πολ/ντας

και τα δύο μέλη με $(x^2+1)^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} = \frac{A(x^2+1)^2}{x+1} + (Bx+\Gamma)(x^2+1) + \Delta x + E$, $\forall x \in \mathbb{C}, x \neq -1$.

Οι ρίζες της $x^2+1=0$ είναι μιγαδικές, $x = \pm i$. Θέτοντας $x = i$ λαμβάνουμε:

$\frac{i+2}{i+1} = \Delta i + E \Rightarrow i+2 = (\Delta i+E)(i+1) = \Delta i^2 + \Delta i + Ei + E = -\Delta + \Delta i + Ei + E \Rightarrow$

$\Rightarrow i+2 = (\Delta+E)i + E - \Delta \Rightarrow \Delta + E = 1$ και $E - \Delta = 2 \Rightarrow \boxed{\Delta = -1/2}$, $\boxed{E = 3/2}$

Πολ/ντας τα δύο μέλη της αρχικής με $x \Rightarrow \frac{x(x+2)}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{Ax}{x+1} + \frac{Bx^2+\Gamma x}{x^2+1} + \frac{\Delta x^2+Ex}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \neq -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+2)}{(x+1)(x^2+1)^2} = A\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} + \lim_{x\to+\infty}\frac{Bx^2+\Gamma x}{x^2+1} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\Delta x^2+Ex}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = A + B + 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \boxed{B = -1/4}$. Τέλος, θέτοντας $x=0$

στην αρχική έχουμε: $2 = A + \Gamma + E \Rightarrow A = 2 - \Gamma - E \Rightarrow \Gamma = 2 - A - E = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{1}{4}}$. Άρα, $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2+1}dx + \int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{(x^2+1)^2}dx =$

$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \left(-\frac{1}{8}\right)\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right] + C =$

$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{3}{4}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{3x}{4(x^2+1)} + C =$ (Άσκηση 22, Ασκ.11.pdf)

$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \mathrm{Arctan}(x) + \frac{3x+1}{4(x^2+1)} + C$, $\forall x \in I$, $I = (-\infty, -1)$, ή, $I = (-1, +\infty)$.