Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $F: I \to \mathbb{R}$ λέγεται αντιπαράγωγος (ή αρχική συνάρτηση) της f, αν η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

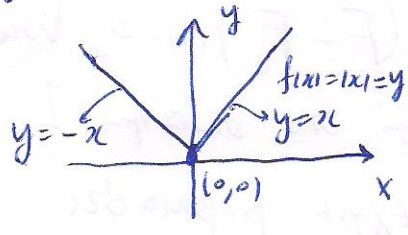
Παραδείγματα: 1) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η $F(x)=1, \forall x \in \mathbb{R}$ είναι αντιπαράγωγος της f. Η $G(x)=2, \forall x \in \mathbb{R}$, είναι επίσης αντιπαράγωγος της f.

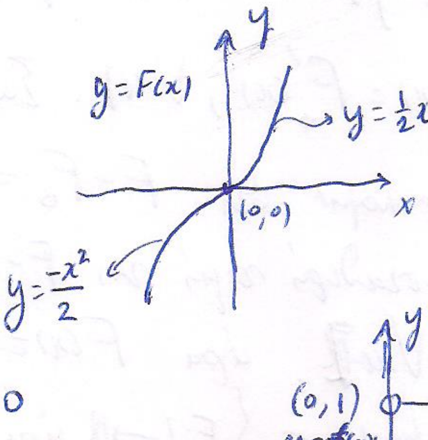
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x)=\frac{1}{3}x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ και η $G(x)=\frac{1}{3}x^3+5, \forall x \in \mathbb{R}$, είναι αντιπαράγωγοι της f.

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=|x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x>0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

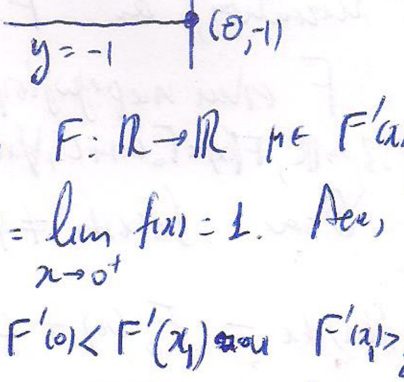
είναι μία αντιπαράγωγος της f, αφού $F'(x) = -x = |x| = f(x), \forall x<0$, και $F'(x) = x = |x| = f(x), \forall x>0$, ενώ $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0 = f(0)$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$





4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$



Η f δεν έχει αντιπαράγωγο. Πράγματι, αν $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, τότε $F'(0)=f(0)=-1$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Άρα, θα υπάρχει $x_1>0$ με $F'(x_1) > \frac{1}{2}$. Άρα, $0=F'(0)<F'(x_1)$ και $F'(x_1)>\frac{1}{2}$.
Από το θεώρ. Darboux $\Rightarrow$ $F'(\xi)=\frac{1}{2}$ για κάποιο $\xi \in (0,x_1) \Rightarrow f(\xi)=\frac{1}{2}$ Άτοπο.

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της f, το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Συμβολίζουμε με $\int f(x)dx$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $y=f(x)$, $x \in I$.

Συνεπώς, $\int f(x)dx = \{F: I \to \mathbb{R},\ F \text{ παραγωγίσιμη και } F'(x)=f(x),\ \forall x \in I\}$.

Το παράδειγμα 4) μας δείχνει ότι είναι δυνατό $\int f(x)dx = \emptyset$ για κάποια συνάρτηση $f(x)$. Η επόμενη πρόταση μας δίνει μία περιγραφή του αόριστου ολοκληρώματος της f, όταν αυτό είναι μη κενό.

Πρόταση: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $F_0: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $F_0'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$. (Άρα, $\int f(x)dx \neq \emptyset$) Τότε

$$\int f(x)dx = \{F: I \to \mathbb{R} \text{ ώστε υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ με } F(x)=F_0(x)+c,\ \forall x \in I\}$$

Απόδειξη: Έστω $F \in \int f(x)dx$. Τότε $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$. Αφού $F_0'=f$ έπεται ότι $F'(x)=F_0'(x)$, $\forall x \in I$. Συνεπώς, $(F-F_0)'(x)=0$, $\forall x \in I$.
Από το ΘΜΤ συμπεραίνουμε ότι $F-F_0$ = σταθερή στο διάστημα I.
Αν $c \in \mathbb{R}$ είναι η σταθερή τιμή της $F-F_0$, έχουμε βέβαια ότι $F(x)-F_0(x)=c$, $\forall x \in I$, άρα $F(x)=F_0(x)+c$, $\forall x \in I$.
Δείξαμε λοιπόν ότι $\int f(x)dx \subset \{F: I \to \mathbb{R} \text{ ώστε } \exists c \in \mathbb{R},\ F(x)=F_0(x)+c,\ \forall x \in I\}$.
Από την άλλη κατεύθυνση, αν $F: I \to \mathbb{R}$ και υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $F(x)=F_0(x)+c$, $\forall x \in I$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη και $F'=F_0'=f$. Άρα, $F \in \int f(x)dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \{F: I \to \mathbb{R},\ F(x)=F_0(x)+c,\ \forall x \in I, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}\} \subset \int f(x)dx$. Άρα τα σύνολα ταυτίζονται.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: Όταν $\int f(x)dx \neq \emptyset$ και $F_0 \in \int f(x)dx$, γράφουμε καταχρηστικά ότι

$$\int f(x)dx = F_0(x) + c, \quad \forall x \in I,$$

με $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά

Υπολογισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

Αν η $f: I \to \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, έχει αντιπαράγωγο, θα θέλαμε να υπολογίσουμε το $\int f(x)dx$. Αυτό δεν είναι πάντα εύκολο όπως θα δούμε. Ενώ η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι, εν γένει, αρκετά εύκολη για την πλειονότητα των συναρτήσεων, η αντίστροφη διαδικασία της αντιπαραγώγισης, της εύρεσης δηλαδή του αόριστου ολοκληρώματος, ακόμα και μιας απλής συνάρτησης, μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη. Αρχικά θα δούμε κάποιους γενικούς κανόνες αντιπαραγώγισης (ολοκλήρωσης) καθώς και τα αόριστα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων.

<u>Αλγεβρικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης</u>: Προκύπτει για τους αντίστοιχους κανόνες γραμμικότητας της παραγώγισης συναρτήσεων.

1) Αν $f: I \to \mathbb{R}$ και $g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, έχουν αντιπαράγωγο, τότε
$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + c \quad , c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

2) Αν $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, έχει αντιπαράγωγο, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε
$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx + c \quad , c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Οι κανόνες αυτοί είναι ισοδύναμοι με τις γνωστές ιδιότητες για την παράγωγο $(f+g)' = f' + g'$ και $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, όταν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για τα αόριστα ολοκληρώματα $\int f(x)g(x)dx$ και $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$, ο οποίος να τα συσχετίζει με τα $\int f(x)dx$ και $\int g(x)dx$. Ειδικότερα, <u>δεν ισχύει</u> ότι $\int f(x)g(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(x)dx\right)$

Π.χ. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$, $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \neq \left(\int x\,dx\right)\left(\int x\,dx\right)$

Αόριστα ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

1) $\int 0\,dx = c, \quad c\in\mathbb{R}$.

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad c\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad x\in\mathbb{R}$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad c\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}$ με $n\neq -1, n<0, \quad x\neq 0$

4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x)+c, & c\in\mathbb{R}, \ x>0 \\ \ln(-x)+c, & c\in\mathbb{R}, \ x<0 \end{cases} = \ln(|x|)+c, \ c\in\mathbb{R}, x\neq 0$

5) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ a\neq -1, \quad x>0$

6) $\int e^x dx = e^x + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}$.

7) $\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ \lambda\neq 0, \ x\in\mathbb{R}$.

8) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}$.

9) $\int \cos(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x) + c, \ c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}, \ \lambda\neq 0$

10) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}$.

11) $\int \sin(\lambda x)\,dx = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ \lambda\neq 0, \ x\in\mathbb{R}$

12) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{Arctan}(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}$.

13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{Arcsin}(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \ -1<x<1$.

14) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}$ με $\cos(x)\neq 0$

15) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + c = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + c, \ c\in\mathbb{R}, \ x\in\mathbb{R}$ με $\sin(x)\neq 0$.

Σημείωση: Οι ισότητες 14) και 15) ισχύουν σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ που δεν περιέχει ρίζες του cos και του sin αντίστοιχα.

Παρατήρηση: 1) $\int\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int 3x^2dx + \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx + C = x^3 + 2\sqrt{x} + C.\ (x>0)$

2) $\int \frac{2x+5}{x^{3/2}}dx = \int\left(2\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^{3/2}}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x^2} + 5\int x^{-3/2}dx + C =$

$= -\frac{2}{x} + 5\cdot\frac{1}{1-3/2}x^{1-3/2} + C = -\frac{2}{x} - \frac{10}{\sqrt{x}} + C \quad (x>0)$

3) $\int\frac{4x^2-3x+2}{x}dx = 4\int x\,dx - 3\int dx + 2\int\frac{dx}{x} + C = \frac{4}{2}x^2 - 3x + 2\ln(|x|)+C =$

$= 2x^2 - 3x + 2\ln(|x|) + C, \quad (x\in(0,+\infty)),$ ή, $(x\in(-\infty,0))$.

4) $\int e^{2x+3}dx = \int e^{2x}e^3dx = e^3\int e^{2x}dx = \frac{e^3}{2}e^{2x} + C = \frac{e^{2x+3}}{2} + C, \quad (x\in\mathbb{R})$

5) $\int\frac{2+3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx = 2\int\frac{dx}{\cos^2(x)} + 3\int dx = 2\tan(x) + 3x + C, \quad x\in I$ με

I διάστημα που δεν περιέχει ρίζες του cos.

6) $\int\frac{dx}{x+\lambda} = \ln|x+\lambda| + C, \quad \forall x>-\lambda,$ είτε $\forall x<-\lambda$

7) $\int\frac{2-x}{x+3}dx$:

$$\begin{array}{r|l} -x+2 & x+3 \\ \hline +x+3 & -1 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{2-x}{x+3} = -1 + \frac{5}{x+3}$

$\Rightarrow \int\frac{2-x}{x+3}dx = \int\left(-1+\frac{5}{x+3}\right)dx = \int(-1)dx + 5\int\frac{dx}{x+3} + C =$

$= -x + 5\ln|x+3| + C$, είτε $x>-3$, είτε $x<-3$

8) $\int\frac{dx}{x^2-1} = \int\left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right]dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$, είτε $x<-1$, είτε $x>1$, είτε $-1<x<1$.

Στοιχειώδεις συναρτήσεις

Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις 1ης τάξης είναι οι ακόλουθες: πολυώνυμα του x, δυνάμεις του x (x^a, $a\in\mathbb{R}$), η εκθετική e^x και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\cos(x)$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_1$ το σύνολο των στοιχειωδών συναρτήσεων 1ης τάξης καθώς και των περιορισμών αυτών σε διαστήματα του $\mathbb{R}$, και καλούμε τις συναρτήσεις $f\in\mathcal{F}_1$, στοιχειώδεις συναρτήσεις 1ης τάξης. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_2$ το σύνολο των στοιχειωδών συναρτήσεων 2ης τάξης: Μία $f\in\mathcal{F}_2$ όταν ισούται είτε με το άθροισμα, είτε με το γινόμενο, είτε με τη σύνθεση δύο στοιχειωδών συναρτήσεων 1ης τάξης, είτε ισούται με την αντίστροφη συνάρτηση μίας στοιχειώδους συνάρτησης 1ης τάξης. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$. Επαγωγικά ορίζονται στοιχειώδεις συναρτήσεις τάξης $n\in\mathbb{N}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots\subset\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1}\subset\cdots$. Πράγματι, αν η $\mathcal{F}_n$ έχει οριστεί, τότε η $\mathcal{F}_{n+1}$ αποτελείται από αθροίσματα, γινόμενα, συνθέσεις δύο συναρτήσεων που ανήκουν στην $\mathcal{F}_n$, και από τις αντίστροφες συναρτήσεις συναρτήσεων (που αντιστρέφονται) της $\mathcal{F}_n$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}=\bigcup_{n\geq 1}^{\infty}\mathcal{F}_n,$$

το σύνολο των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Από τον ορισμό της $\mathcal{F}$ έχουμε ότι: Αν I_1, I_2 διαστήματα του $\mathbb{R}$ και $f_1:I_1\to\mathbb{R}$, $f_2:I_2\to\mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$, τότε οι $f_1+f_2:I_1\cap I_2\to\mathbb{R}$ και $f_1f_2:I_1\cap I_2\to\mathbb{R}$ ανήκουν επίσης στην $\mathcal{F}$. Αν οι $g:I\to J$ και $h:J\to\mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$ (I,J διαστήματα), τότε και η $h\circ g:I\to\mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{F}$. Αν η $\varphi:I\to J$ είναι 1-1 και επί (I,J διαστήματα) και $\varphi\in\mathcal{F}$, τότε η $\varphi^{-1}:J\to I$ ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Π.χ. η συνάρτηση $e^x + \ln(x)$ είναι στοιχειώδης $2^{ης}$ τάξης. Η συνάρτηση $\underbrace{\underbrace{[e^x + \ln(x)]}_{2^{ης}\text{ τάξης}} \underbrace{\sin(x)}_{1^{ης}\text{ τάξης}}}_{3^{ης}\text{ τάξης}} + \underbrace{(x^2+5x+3)\cos(x)}_{2^{ης}\text{ τάξης}}$ είναι $4^{ης}$ τάξης

Η συνάρτηση $\underbrace{\underbrace{\mathrm{Arctan}}_{4^{ης}}\left(\underbrace{e^x+5x^2}_{2^{ης}}\right)}_{5^{ης}} + \underbrace{\underbrace{\sin^2}_{2^{ης}}\underbrace{(5x+4)}_{1^{ης}}}_{3^{ης}} + \underbrace{\ln[\sin(x)]}_{2^{ης}}$ είναι $6^{ης}$ τάξης

Η συνάρτηση $\mathrm{Arcsin}(x)$ είναι στοιχειώδης $2^{ης}$ τάξης.

Μπορεί να δειχτεί ότι αν $f \in \mathcal{F}$ (δηλαδή f στοιχειώδης) τότε και η $f' \in \mathcal{F}$.

Ορισμός: Αν $f \in \mathcal{F}$, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ της f καλείται στοιχειώδες όταν $\int f(x)dx \subset \mathcal{F}$. Όταν δηλαδή $F \in \mathcal{F}$, όπου $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in I$ με $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα.

Είναι δυνατό για μία στοιχειώδη συνάρτηση $f(x)$, το $\int f(x)dx$ να μην είναι στοιχειώδες. Μπορεί να δειχτεί ότι τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln(x)}, \quad \int \sin(x^2)dx, \quad \int \sqrt{x^4+1}\,dx$$

δεν είναι στοιχειώδη. Στα ακόλουθα θα δούμε κάποιες τεχνικές ολοκλήρωσης που μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τα στοιχειώδη ολοκληρώματα. Για τα μη στοιχειώδη ολοκληρώματα συνήθως χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειρές. Π.χ.

$$\int e^{x^2}dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)} + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Βασικές Τεχνικές Ολοκλήρωσης

<u>Ολοκλήρωση με αντικατάσταση</u>: Έστω I, J διαστήματα και $\varphi: J \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} I$, φ παραγωγίσιμη και $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in J$. Τότε για κάθε $f: I \to \mathbb{R}$ με $\int f(x)dx = F_0(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in I$, έχουμε ότι

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F_0(\varphi(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},\ x \in J.$$

Επίσης, αν $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in J$, τότε

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},\ x \in I.$$

Οι παραπάνω ~~ισότητες~~ προκύπτουν από τον κανόνα της αλυσίδας για την παράγωγο. Πράγματι, $[F_0(\varphi(x))]' = F_0'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $\forall x \in J$ η οποία συνεπάγεται την πρώτη εξίσωση. Για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι $[G(\varphi^{-1}(x))]' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x)$, $\forall x \in I$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Επίσης, αν $\varphi^{-1}(x) = y \in J$, $x \in I$, τότε αφού $\varphi'(y) \neq 0$ θα έχουμε ότι $(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$, ενώ $G'(\varphi^{-1}(x)) =$

$$= f[\varphi(\varphi^{-1}(x))]\varphi'(\varphi^{-1}(x)) = f(x)\cdot\varphi'(y).$$ Συνεπώς, $[G(\varphi^{-1}(x))]' = f(x)\varphi'(y)\dfrac{1}{\varphi'(y)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [G(\varphi^{-1}(x))]' = f(x), \ \forall x \in I. \Rightarrow \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c,\ c \in \mathbb{R},\ x \in I.$$

Στις εφαρμογές, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της μορφής $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, εκτελούμε την αντικατάσταση (αλλαγή μεταβλητής) $t = \varphi(x)$, με $t \in J \subset \mathbb{R}$ διάστημα, όταν ~~για την οποία~~ $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Τότε, θέτουμε $dt = \varphi'(x)dx$ και γράφουμε

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c, \quad c\in\mathbb{R}, \quad t\in J=\varphi(I).$$

Η αντικατάσταση $t=\varphi(x)$ γίνεται όταν γνωρίζουμε το $\int f(t)dt = F(t)+c$

Τότε $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in I$. Είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα. Στην αντικατάσταση $t=\varphi(x)$, πρέπει $\varphi'(x)\neq 0$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος $x\in I$.

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $\int \sin(2x+7)dx \underset{dt=2dx}{\overset{t=2x+7}{=\!=\!=}} \int \sin(t)\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)dt = -\frac{1}{2}\cos(t)+c$

$$\Rightarrow \int \sin(2x+7)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+7)+c, \quad x\in\mathbb{R}.$$

2) $\int x e^{x^2+4}dx \underset{dt=2xdx}{\overset{t=x^2+4}{=\!=\!=}} \int e^t\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}e^t+c = \frac{1}{2}e^{x^2+4}+c$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

3) $\int \frac{x^2+3}{x^3+9x}dx \underset{dt=(3x^2+9)dx}{\overset{t=x^3+9x}{=\!=\!=}} \int \frac{1}{3}\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t|+c =$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+9x|+c$$

4) $\int \frac{x}{(x^2+1)^4}dx \underset{du=2xdx}{\overset{u=x^2+1}{=\!=\!=}} \int \frac{1}{2}\frac{du}{u^4} = \frac{1}{2}\int u^{-4}du = \frac{1}{2}\frac{1}{1-4}u^{1-4}+c =$

$$= -\frac{1}{6}u^{-3}+c = -\frac{1}{6}\frac{1}{(x^2+1)^3}+c, \quad x\in\mathbb{R}.$$

5) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx \underset{du=\frac{dx}{x}}{\overset{u=\ln(x)}{=\!=\!=}} \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}+c = \frac{2}{3}\left[\ln(x)\right]^{3/2}+c$, $x\geq 1$.

6) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx \underset{du=\cos(x)dx}{\overset{u=\sin(x)}{=\!=\!=}} \int \frac{\cos^2(x)\cos(x)}{u^4}dx = \int \frac{(1-u^2)du}{u^4} = \int\frac{du}{u^4} - \int\frac{du}{u^2} =$

$= -\frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3\sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)} + c$, $x\in I$ με I διάστημα στο οποίο δεν μηδενίζεται το sin.

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4\ln x+3}} \ \underset{du=\frac{4}{x}dx}{\overset{u=4\ln x+3}{=}} \int \frac{1}{4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{1}{2}\sqrt{4\ln x+3} + C$ με

$4\ln(x)+3>0$, δηλαδή $x > e^{-3/4}$.

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} \ \underset{\substack{dx=a\,dt\\(a>0)}}{\overset{x=at}{=}} \int \frac{a\,dt}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}(t) + C =$

$\displaystyle = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, $x\in\mathbb{R}$, $(a>0)$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x + x[\ln(x)]^2} = \int \frac{dx}{x\left[(\ln(x))^2+5\right]} \ \underset{du=\frac{dx}{x}}{\overset{u=\ln(x)}{=}} \int \frac{du}{u^2+5} =$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{5}}\right) + C$, $(x>0)$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+4} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+4} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} =$

$\displaystyle = \frac{4}{15}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{15}/2}\right)^2+1} \ \underset{du=\frac{2dx}{\sqrt{15}}}{\overset{u=\frac{x+1/2}{\sqrt{15}/2}}{=}} \ \frac{4}{15}\int \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{du}{u^2+1} =$

$\displaystyle = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{Arctan}(u) + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C$, $x\in\mathbb{R}$.

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} \ \underset{\substack{x=t^2\\dx=2t\,dt}}{\overset{t=\sqrt{x}}{=}} \int \frac{2t\,dt}{3+t} = \int \frac{2t+6-6}{t+3}\,dt = \int\left(2-\frac{6}{t+3}\right)dt =$

$= 2t - 6\ln(t+3) + C = 2\sqrt{x} - 6\ln(3+\sqrt{x}) + C$, $(x\geq 0)$

12) $\displaystyle\int (1-x)^{100}x^2\,dx \ \underset{dt=-dx}{\overset{t=1-x}{=}} -\int t^{100}(1-t)^2\,dt = -\int t^{100}(1+t^2-2t)\,dt =$

$\displaystyle = -\int\left(t^{100}+t^{102}-2t^{101}\right)dt = -\frac{t^{101}}{101} - \frac{t^{103}}{103} + \frac{2t^{102}}{102} + C =$

$\displaystyle = -\frac{(1-x)^{101}}{101} - \frac{(1-x)^{103}}{103} + \frac{(1-x)^{102}}{51} + C$, $(x\in\mathbb{R})$.

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8-x} = \int \frac{dx}{x(x^7-1)} \xrightarrow[du=7x^6dx]{u=x^7-1} \int \frac{du}{7x^6\cdot x\, u} = \int \frac{du}{7x^7 u} =$

$\displaystyle= \int \frac{du}{7(u+1)u} = \frac{1}{7}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{7}\ln(|u|) - \frac{1}{7}\ln|u+1| + C$

$\displaystyle= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7-1}{x^7}\right| + C$, για $x<0$, για $x>1$, για $0<x<1$.

14) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\, dx \xrightarrow[\substack{u^2=1+e^x \\ 2u\,du=e^x dx \\ \Rightarrow 2u\,du=(u^2-1)dx}]{u=\sqrt{1+e^x}} \int \frac{u\cdot 2u}{u^2-1}\, du = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\, du =$

$\displaystyle= \int \frac{2u^2-2+2}{u^2-1}\, du = \int \left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right) du = 2u + \frac{1}{2}2\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$

$\displaystyle= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$, $x\in\mathbb{R}$.

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \xrightarrow[\substack{u^2=1+e^x \\ 2u\,du=e^x dx \\ 2u\,du=(u^2-1)dx}]{u=\sqrt{1+e^x}} \int \frac{2u}{u^2-1}\,\frac{1}{u}\, du = \int \frac{2}{u^2-1}\, du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$

$\displaystyle= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$

16) $\displaystyle\int \cos[\sin(x)]\cos(x)\, dx \xrightarrow[dt=\cos(x)dx]{t=\sin(x)} \int \cos(t)\, dt = \sin(t) + C = \sin[\sin(x)] + C$, $(x\in\mathbb{R})$.

17) $\displaystyle\int \cos^2(x)\, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$, $(x\in\mathbb{R})$

18) $\displaystyle\int \sin^2(x)\, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$, $(x\in\mathbb{R})$