Αρχή της (Μαθηματικής) Επαγωγής

Η αποδεικτική μέθοδος της επαγωγής προέρχεται από το ακόλουθο

Θεώρημα: Έστω $M \subset \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες:

(i) $1 \in M$.

(ii) $\forall n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.

Τότε, $M = \mathbb{N}$.

Απόδ: Έστω ότι $M \subsetneq \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 \notin M$. Άρα, $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$. Δηλαδή το $\mathbb{N} \setminus M$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Έπεται ότι το $\mathbb{N} \setminus M$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $k = \min(\mathbb{N} \setminus M)$. Αυτό σημαίνει ότι $k \in \mathbb{N} \setminus M$ και $k \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus M$. Αφού $1 \in M$ (λόγω (i)), έχουμε ότι $k > 1$. Άρα, $k-1 \in \mathbb{N}$ και βέβαια $k-1 < k = \min(\mathbb{N} \setminus M)$. Συνεπώς, $k-1 \notin (\mathbb{N} \setminus M)$. Άρα, $k-1 \in M$. Το (ii) μας δίνει ότι $k \in M$. Άτοπο, αφού $k \in \mathbb{N} \setminus M$. Αναγκαία λοιπόν, $M = \mathbb{N}$ και το θεώρημα αποδείχθηκε. ⊢⊣

Η αρχή της επαγωγής μας βοηθά να αποδεικνύουμε προτάσεις που ισχυρίζονται ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί ικανοποιούν μία κοινή ιδιότητα P. (π.χ., η P θα μπορούσε να ήταν ότι $n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Για να δείξουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί ικανοποιούν την P αποδεικνύουμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1 : Αποδεικνύουμε ότι ο 1 ικανοποιεί την P.

Βήμα 2 : Υποθέτουμε ότι κάποιος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την P. (Προσοχή : δεν γνωρίζουμε ποιος n είναι αυτός)

Βήμα 3 : Αποδεικνύουμε ότι ο $n+1$ ικανοποιεί την P.

Αν ολοκληρώσουμε τα 3 βήματα, τότε θα γνωρίζουμε ότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την P.

Παραδείγματα : 1) $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για $n=1$, η ανισότητα γίνεται $2>1$ που είναι αληθής.
Υποθέτουμε ότι $2^n > n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$.
Θα δείξουμε ότι $2^{n+1} > n+1$. Αφού $2^n > n$ λόγω επαγωγικής υπόθεσης, έπεται ότι $2 \cdot 2^n > 2n$. Άρα, $2^{n+1} > 2n$. Όμως $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq n+1$. Συνεπώς, $2^n > n+1$. Λαμβάνουμε τώρα από την αρχή της επαγωγής, ότι $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $(1+x+\dots+x^{n-1})(x-1) = x^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Για $n=1$ η ταυτότητα γίνεται: $1 \cdot (x-1) = x-1$ που είναι αληθής.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα:

$$(1+x+\dots+x^{n-1})(x-1) = x^n - 1.$$

Θα δείξουμε ότι $(1+x+\dots+x^{n-1}+x^n)(x-1) = x^{n+1} - 1$

Πράγματι, $(1+x+\dots+x^{n-1}+x^n)(x-1) = (1+x+\dots+x^{n-1})(x-1) + x^n(x-1) =$

$$\overset{\text{Επαγωγ.}}{\underset{\text{Υποθ.}}{=}} x^n - 1 + x^n(x-1) = x^n - 1 + x^{n+1} - x^n = x^{n+1} - 1.$$

Άρα αποδείχτηκε η ταυτότητα για το $n+1$. Από την αρχή της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι η ταυτότητα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Ανισότητα Bernoulli: Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a > -1$. Τότε

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για $n=1$ η ανισότητα γράφεται: $1+a \geq 1+a$ η οποία είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι για <u>κάποιο</u> $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(1+a)^n \geq 1+na. \quad (*)$$

Θα δείξουμε ότι $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$. Πράγματι,

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \underset{a>-1}{\overset{(*)}{\geq}} (1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a, \text{ αφού } na^2 \geq 0.$$

Δηλαδή η ανισότητα αποδείχτηκε για το $n+1$. Από την αρχή της Επαγωγής έχουμε ότι η ανισότητα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $7^n - 2^n$ διαιρείται με το 5.

Για $n=1$, έχουμε $7^n - 2^n = 7-2 = 5$, διαιρείται με το 5.

Υποθέτουμε ότι για <u>κάποιο</u> $n \in \mathbb{N}$, ο $7^n - 2^n$ διαιρείται με το 5.

Θα δείξουμε ότι και ο $7^{n+1} - 2^{n+1}$ διαιρείται με το 5.

Πράγματι, $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7^n 7 - 2 \cdot 2^n = 7^n(5+2) - 2 \cdot 2^n =$

$= 7^n \cdot 5 + 7^n \cdot 2 - 2 \cdot 2^n \Rightarrow 7^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot 7^n + 2(7^n - 2^n)$

Όμως, από υπόθεση, ο 5 διαιρεί το $7^n - 2^n$. Άρα ο 5 διαιρεί το $2(7^n - 2^n)$. Επίσης ο 5 διαιρεί το $5 \cdot 7^n$. Άρα ο 5 διαιρεί και το άθροισμα των $5 \cdot 7^n$, $2(7^n - 2^n)$, δηλαδή το $7^{n+1} - 2^{n+1}$. Από αρχή επαγωγής έπεται ότι ο 5 διαιρεί το $7^n - 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Ασκήσεις</u>: 1) Δείξτε ότι αν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$, $\forall n \geq 2$.

2) Δείξτε ότι αν $a > 0$ και $b > 0$, τότε

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Σύμβολα άθροισης και γινομένου</u>

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι αριθμοί (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) τότε θέτουμε

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (\text{άθροισμα})$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdots\cdots a_n \quad (\text{γινόμενο})$$

Παραγοντικά, Διωνυμικοί Συντελεστές

Ορίζουμε, για $n \in \mathbb{N}$, $n! \equiv 1 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$, το γινόμενο των n πρώτων φυσικών αριθμών. Έτσι,

$1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 2 3 = 6$, $4! = 1 2 3 4 = 24$, ...

Παρατηρούμε ότι $(n+1)! = \underbrace{1 \cdots n}_{n!}(n+1) = (n!)(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επίσης, $(n+2)! = [(n+1)!](n+2) = (n!)(n+1)(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Άσκηση</u>: Αν $f(n) = (2n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε το κλάσμα $\frac{f(n+1)}{f(n)}$.

<u>Λύση</u>: $$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{[2(n+1)+1]!}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \frac{[(2n+1)!](2n+2)(2n+3)}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = (2n+2)(2n+3), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Ορισμός</u>: $0! = 1$.

<u>Ορισμός</u>: Αν $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $k \leq n$, ορίζουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!)(n-k)!}.$$

Ο $\binom{n}{k}$ λέγεται διωνυμικός συντελεστής.

Π.χ., $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n!}{2\,(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq 2,$$

αφού είτε ο $n-1$, είτε ο n είναι άρτιος.

Αποδεικνύεται ότι αν ένα σύνολο A έχει $n \in \mathbb{N}$ στοιχεία, τότε ο αριθμός $\binom{n}{k}$ ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του A που έχουν ακριβώς k στοιχεία.

<u>Διώνυμο του Newton</u>: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Π.χ., αν $n=3$, τότε $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$, $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$. Άρα, $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3 = (a+b)^3$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αφού $a+b = b+a$, το διώνυμο Newton γράφεται και ως:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός: Ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών, κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Για να συμβολίσουμε μία ακολουθία πραγματικών, δεν χρησιμοποιούμε το σύμβολο της συνάρτησης, αλλά παραθέτουμε τις τιμές αυτές της συνάρτησης. Θέτουμε δηλαδή $f(n) \equiv a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και συμβολίζουμε την ακολουθία ως $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Έτσι οι ακολουθίες θα συμβολίζονται με $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για εποπτικούς λόγους, κάποιες φορές, γράφουμε την $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Για μία ακολουθία πραγματικών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, οι a_n λέγονται <u>όροι</u> της ακολουθίας. Πιο συγκεκριμένα, αν $n \in \mathbb{N}$, ο a_n λέγεται ο n-στός όρος της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ο a_{n+1} λέγεται και επόμενος όρος του a_n, ενώ ο a_{n-1} λέγεται προηγούμενος όρος του a_n.

Π.χ: Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{2n-1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n+1}{n+1}, \dots$$

Π.χ. : Η ακολουθία $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{αν το } n\text{-στό ψηφίο στο δεκαδ. ανάπτυγμα του } \pi \text{ είναι άρτιο} \\ 0, & \text{——||—— —||—— —||—— περιττό} \end{cases}$$

Παρατηρούμε, ότι σε αντίθεση με την $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, δεν είναι σαφές ποιός είναι ο εκατοστός όρος (b_{100}) της $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Π.χ. : Οι φυσικοί αριθμοί σχηματίζουν μία ακολουθία πραγματικών την $(\kappa_n)_{n=1}^{\infty}$ με $\kappa_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι κατασκευής ακολουθιών.

1) Μέσω κάποιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, την οποία περιορίζουμε στο $\mathbb{N}$. Θέτουμε δηλαδή $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και παίρνουμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Π.χ. η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με $x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Αναδρομική μέθοδος ορισμού ακολουθιών. Με αυτή τη μέθοδο δίνεται ένα αρχικό πλήθος όρων της ακολουθίας και μία σχέση (αναδρομική εξίσωση) που μας λέει πως να βρούμε κάποιον όρο της ακολουθίας όταν γνωρίζουμε τους προηγούμενους όρους.

Π.χ.: Η ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$x_1 = 0 \quad \text{και} \quad x_{n+1} = 3x_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Κάποιοι αρχικοί όροι της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$: $0, 2, 8, 26, \ldots$

Μέσω της αναδρομικής σχέσης υπολογίζεται κάθε όρος της ακολουθίας από τον προηγούμενό του. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε ένα τύπο που να δίνει τον x_n σαν συνάρτηση του n: $x_n = 3^{n-1} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα (Ακολουθία Fibonacci): Θέτουμε $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ και

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \text{για } n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3.$$

Κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Εδώ δεν είναι άμεσο να βρούμε φόρμουλα για το n-στό όρο της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ εκφρασμένο ως συνάρτηση του $n \in \mathbb{N}$.

Μπορεί να δειχτεί ότι: $$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παρατήρηση: Πολλές φορές οι αναδρομικοί ορισμοί ακολουθιών ~~...~~ έχουν το πλεονέκτημα γρηγορότερων υπολογισμών των όρων της ακολουθίας μέσω κατάλληλα προγραμματισμένου υπολογιστή.

<u>Αλγεβρικές Πράξεις με ακολουθίες</u>: Αφού μία ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$, μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλ/μού μεταξύ ακολουθιών. Έτσι, αν $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι πραγματικές ακολουθίες τότε:

(i) Η ακολουθία $(a_n+b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι το άθροισμα των ακολουθιών $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$.

(ii) Η ακολουθία $(a_nb_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι το γινόμενο των ακολουθιών $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$.

<u>Υπακολουθίες μιας ακολουθίας</u>: Αν $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών τότε μία υπακολουθία της είναι μία νέα ακολουθία που προκύπτει από την αρχική $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ διατηρώντας ένα άπειρο πλήθος από τους όρους της. Πιο συγκεκριμένα, μία τυπική υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε ένα <u>άπειρο</u> υποσύνολο $M\subset\mathbb{N}$. Τότε, $M=\{k_1<k_2<\dots<k_n<\dots\}$ Δηλαδή $k_1,k_2,k_3,\dots,k_n,k_{n+1},\dots$ είναι τα στοιχεία του M. Θέτουμε $b_n=a_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Η $(b_n)_{n\geq1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$. Συνήθως γράφουμε $(a_{k_n})_{n\geq1}^{\infty}$ για μία υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$, όπου $\{k_1<k_2<k_3<\dots\}$ είναι ένα τυχόν άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

Μια ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει πληθώρα υπακολουθιών.
Ας δούμε μερικές σημαντικές υπακολουθίες της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$

1) Η $(a_{n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με όρους $a_2, a_3, a_4, \dots$. Δηλαδή παραλείπουμε τον a_1 από την αρχική ~~υπα~~ ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

2) Αν $m\in\mathbb{N}$ σταθερό, τότε η $(a_{n+m})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με όρους $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots$. Δηλαδή αυτή η υπακολουθία προκύπτει από την αρχική παραλείποντας τους πρώτους m όρους της $a_1, \dots, a_m$.
Οι υπακολουθίες αυτής της μορφής, $(a_{n+m})_{n\geq 1}^{\infty}$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}$, λέγονται υπακολουθίες ουρές της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

3) Η υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι η υπακολουθία των όρων περιττής τάξης της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Οι όροι της είναι:
$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n-1}, a_{2n+1}, \dots$

4) Η υπακολουθία $(a_{2n})_{n\geq 1}^{\infty}$ των όρων άρτιας τάξης της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$
$a_2, a_4, a_6, a_8, \dots, a_{2n}, a_{2n+2}, \dots$

Παραδείγματα: 1) Αν $a_n = \dfrac{2n+5}{3n+7}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, βρείτε την ακολουθία $(a_{n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$.

Έχουμε ότι $a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+5}{3(n+1)+7} = \dfrac{2n+7}{3n+10}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Αν $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, βρείτε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(a_{2n+1})_{n\geq 1}^{\infty}$ και υπολογίστε το πηλίκο $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $a_{2n} = \dfrac{2n+1}{(2n)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $a_{2n+1} = \dfrac{2n+1+1}{(2n+1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \dfrac{2n+2}{(2n+1)!} \dfrac{(2n)!}{2n+1} = \dfrac{2n+2}{(2n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Αν $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{n!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Μονότονες και Φραγμένες Ακολουθίες

<u>Ορισμός</u>: Η ακολουθία των πραγματικών $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ λέγεται:

(i) Αύξουσα, όταν $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Γνησίως αύξουσα, όταν $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Φθίνουσα, όταν $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) Γνησίως φθίνουσα, όταν $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) Μονότονη (αντ. γνησίως μονότονη) αν είναι είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα (αντ. γν. αύξ, ή γν. φθ.)

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $a_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$a_n = n^2 < (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι γνησίως φθίνουσα γιατί $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) $\gamma_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{n}{2}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα.

$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$

4) $\delta_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δεν είναι μονότονη.

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

5) Η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά ως $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Η $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα. Το δείχνουμε επαγωγικά.

Δείχνουμε δηλαδή ότι $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για $n=1$, έχουμε $x_1 = 1 < x_2 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$, αληθές.

Υποθέτουμε ότι $x_n < x_{n+1}$ για <u>κάποιο</u> $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι $x_{n+1} < x_{n+2}$. Αυτή η ανισότητα, λόγω της αναδρομικής σχέσης, ισοδυναμεί με τη $\frac{1}{2} x_n + 3 < \frac{1}{2} x_{n+1} + 3$ η οποία με τη σειρά της ισοδυναμεί με την $x_n < x_{n+1}$ η οποία ισχύει λόγω υπόθεσης.

Ορισμός: Αν $A \subset \mathbb{R}$, το A λέγεται φραγμένο αν είναι υποσύνολο ενός <u>φραγμένου</u> διαστήματος του $\mathbb{R}$.

Συνεπώς, $A \subset \mathbb{R}$ φραγμένο όταν υπάρχουν $a<b$ στο $\mathbb{R}$ με $A \subset [a,b]$. Παρατηρούμε ότι μεγαλώνοντας, αν χρειάζεται το $[a,b]$, μπορούμε να το κάνουμε συμμετρικό ως προς το 0. Δηλαδή, $A \subset \mathbb{R}$ φραγμένο $\iff \exists\, M>0$ ώστε $A \subset [-M, M]$.

Έπεται ότι $A \subset \mathbb{R}$ φραγμένο $\iff \exists\, M>0 : |x| \leq M, \ \forall x \in A$.

Παραδείγματα: 1) Κάθε φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο σύνολο.

2) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ είναι φραγμένο αφού $A \subset [0,1]$.

3) $A = \left\{ \frac{\sin(n)}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ είναι φραγμένο γιατί $\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός: Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ (των πραγματικών αριθμών) είναι φραγμένη όταν το σύνολο των όρων της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ φραγμένη $\iff \exists\, M>0 : |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Ο $M>0$ παραπάνω είναι ανεξάρτητος του $n \in \mathbb{N}$.

π.χ. οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$, $\left((-1)^n\right)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένες.

Πρόταση: Κάθε πραγματική ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.

Δηλαδή, για κάθε ακολουθία πραγματικών $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ μπορούμε να βρούμε φυσικούς $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ τέτοιους ώστε:

Είτε η $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, είτε η $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα.

Απόδειξη: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών. Ο $k\in\mathbb{N}$ λέγεται σημείο κορυφής της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ όταν $a_n\leq a_k, \forall n\geq k$.

Για την $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση I: Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων κορυφής.

Περίπτωση II: Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει άπειρο πλήθος σημείων κορυφής.

Στην Περίπτωση I, θα υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ ώστε κανένα $k>k_0$ να είναι σημείο κορυφής της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Έστω $k_1>k_0$. Αφού το k_1 δεν είναι σημείο κορυφής, βρίσκουμε $k_2>k_1$ με $a_{k_2}>a_{k_1}$. Αφού το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής, βρίσκουμε $k_3>k_2$ με $a_{k_3}>a_{k_2}$. Άρα $a_{k_1}<a_{k_2}<a_{k_3}$ και $k_1<k_2<k_3$. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο και κατασκευάζουμε γνήσια αύξουσα υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$.

Στην Περίπτωση II, έστω $k_1<k_2<k_3<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ τα άπειρα σημεία κορυφής της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$. Τότε βέβαια έχουμε ότι

$$a_{k_1}\geq a_{k_2}\geq a_{k_3}\geq\dots\geq a_{k_n}\geq a_{k_{n+1}}\geq\dots$$

Δηλαδή η $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα.

Σύγκλιση πραγματικών ακολουθιών

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ πραγματική ακολουθία και $A \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι <u>σχεδόν όλοι</u> οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο A όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $a_n \in A$, $\forall n \geq n_0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο $A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin A\}$ είναι πεπερασμένο

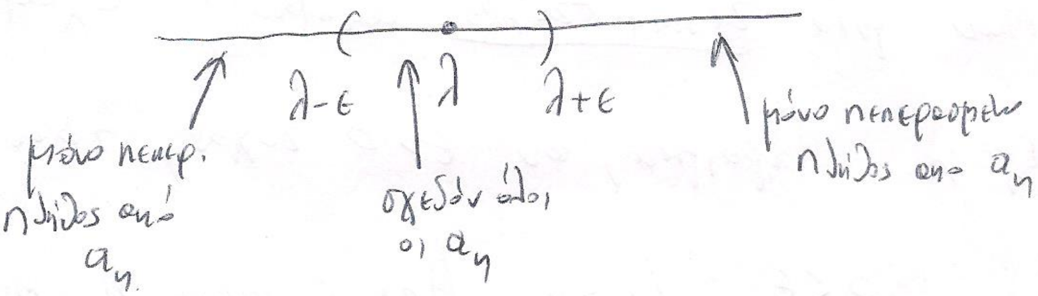
2) Το να μην ανήκουν σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ στο A ισοδυναμεί με το να υπάρχουν άπειροι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ που <u>δεν</u> ανήκουν στο A. Δηλαδή υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $a_{k_n} \notin A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $a_n = \begin{cases} -n, & n \leq 100 \\ 1, & 101 \leq n \leq 200 \\ 2, & n \geq 201. \end{cases}$ Τότε σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ βρίσκονται στο διάστημα $[3/2, +\infty)$

2) $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Δεν είναι αλήθεια ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$

Ορισμός: Έστω $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ πραγματική ακολουθία και $\lambda\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ συγκλίνει στον λ, ή ότι έχει όριο τον λ, όταν για κάθε $\epsilon>0$, έχουμε ότι σχεδόν όλοι οι όροι της $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ βρίσκονται στο διάστημα $(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)$.

Όταν δηλαδή $\forall \epsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-\lambda|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$.



Προσοχή: 1) Η παραπάνω εικόνα πρέπει να ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, οσοδήποτε μικρό.

2) Δοθέντος $\epsilon>0$, βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $|a_n-\lambda|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Το n_0 εξαρτάται από το ϵ. Γενικά, όσο μικραίνει το $\epsilon>0$, τόσο μεγαλώνει το n_0.

Συμβολισμοί: Γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lambda$, ή, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, ή, $a_n\longrightarrow\lambda$ όταν η $(a_n)_{n\geq1}^{\infty}$ έχει όριο τον $\lambda\in\mathbb{R}$.

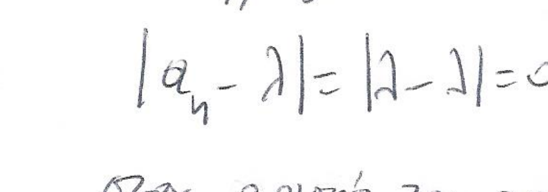
<u>Παρατήρηση</u>: 1) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $a_n = \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $a_n \longrightarrow \lambda$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $|a_n - \lambda| = |\lambda - \lambda| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Εδώ παίρνουμε $n_0 = 1$ στον ορισμό του ορίου.

2) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}$ σταθερά. Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με

$$a_n = \begin{cases} \text{ό,τι νά'ναι}, & \text{αν } n \leq m \\ \lambda, & \text{αν } n > m. \end{cases}$$

Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι μία <u>τελικά σταθερή</u> ακολουθία. Έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda$. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, τότε $|a_n - \lambda| = |\lambda - \lambda| = 0 < \varepsilon$, $\forall n > m$. Άρα παίρνουμε $n_0 = m+1$ στον ορισμό του ορίου. Είναι επίσης σαφές ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το πολύ m το πλήθος όροι της $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ δεν ανήκουν στο διάστημα $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$

3) $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ <u>δεν συγκλίνει</u> σε πραγματικό αριθμό. Πράγματι, αν $a_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, τότε, είτε $\lambda > 0$, είτε $\lambda < 0$, είτε $\lambda = 0$



,