ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ, 3/7/2024

Άσκηση 1. *(3+1=4 μον)*

(α) *(3 μον)* Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - xy^2$.

- (i) *(1 μον)* Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f εως και δεύτερης τάξης.
- (ii) *(1 μον)* Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f δηλαδή τα σημεία $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.
- (iii) *(1 μον)* Με χρήση του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου βρείτε τα τοπικά μέγιστα, τα τοπικά ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία της f.

(β) *(1 μον)* Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^3$. Εξετάστε αν η f έχει τοπικά ακρότατα.

Λύση. (β) (i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2x - x^2 - y^2 \\
f_y(x,y) &= 2y - 2xy \\
f_{xx}(x,y) &= 2 - 2x \\
f_{yy}(x,y) &= 2 - 2x \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -2y
\end{aligned}$$

(ii) Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2x - x^2 - y^2 = 0 \\
f_y(x,y) &= 2y - 2xy = 0
\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $2y(1-x) = 0$ και άρα $y = 0$ ή $x = 1$. Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $2x - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς για $y = 0$ έχουμε τα σημεία $(0,0)$ καί $(2,0)$. Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $2x - x^2 - y^2 = 1 - y^2 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία $(1,1)$ και $(1,-1)$. Συνολικά λοιπόν έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$.

(iii) Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (2-2x)^2 - 4y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0) = 4 > 0$, $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ και άρα στο $(0,0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(2) $\Delta(2,0) = 4 > 0$, $f_{xx}(2,0) = -2 < 0$ και άρα στο $(0,2)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(3) $\Delta(1,1) = -4 < 0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1) = -4 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Άσκηση 2. *(1+1,5+1,5=4 μον)*

(α) *(1 μον)* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx.$

(β) *(1,5 μον)* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx.$

(γ) (β) *(1,5 μον)* Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = 1 - \sin^3 t,\ \ y(t) = \cos^3 t,\ \ t \in [0, \pi/2]$$

[Υπενθυμίζεται ότι $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$]

Λύση. (i) Έχουμε

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{x-1}{x^2-4x+4+1}\,dx = \int \frac{x-1}{\left(x-2\right)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y = x-2 \Rightarrow x = y+2$, $dx = dy$ οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{y+1}{y^2+1}\,dy &= \int \frac{y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{1}{y^2+1}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \arctan y \\ &= \frac{1}{2}\ln\big((x-2)^2+1\big) - \arctan(x-2)\end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $y = e^x$. Έχουμε $dy = e^x dx$ και

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{y^3+y^2}\,dy = \int \frac{1}{y^2(y+1)}\,dy$$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$

$$Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2 = 1$$

$$(A+C)y^2 + (A+B)y + B = 1$$

$B = 1$, $A = -1$ $C = 1$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2(y+1)}\,dy = -\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{y^2}\,dy + \int \frac{1}{y+1}\,dy = -\ln|y| - \frac{1}{y} + \ln|y+1|$$

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx = -\ln(e^x) - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1)$$

(iii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ \cos^2 t\ (-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 3\ |\cos t \cdot \sin t|\ dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt
\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2}\big(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)\big) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 3. (*3 μον*)

(α) (*1 μον*) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$. $\big[$Υπενθυμίζεται ότι $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\big]$

(β) (*0,5 μον*) (*0,5 μον*) Υπολογίστε το $\sin(\arctan 1)$.

(γ) (*1,5 μον*) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρείς φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ (δηλαδή της συνάρτησης $g(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$), αν το αντίστοιχο πολυώνυμο της f είναι $T(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

$\Big[$ Υπενθυμίζεται ότι το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης h τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $h(0) + h'(0)x + \dfrac{h''(0)}{2}x^2 + \dfrac{h'''(0)}{3!}x^3\Big]$

Λύση. (α) (1ος τρόπος) Με χρήση του κανόνα De l' Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x^2} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1\right)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{2x} \\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2ος τρόπος) Με χρήση του Τύπου Taylor: Έστω $f(x) = \cosh x$. Τότε $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ και $f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Οπότε $f(0) = \cos h0 = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$ και το πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \cosh x$ τάξης 2 με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Από τον Τύπο Taylor για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε

$$\cosh x = T_2(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}}{3!}x^3 \Rightarrow \cosh x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}}{3!}x^3$$

και άρα

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}}{3!}x^3}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}}{3!}x = \frac{1}{2}$$

(β) Εξ ορισμού της συνάρτησης arctan ισχύει ότι

$$\arctan 1 = x \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Άρα $\sin(\arctan 1) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(γ) Έχουμε $T_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$ και άρα

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad \text{και } f'''(0) = 3! = 6$$

Επιπλέον

1. $g' = (f^2)' = 2ff'$,
2. $g'' = (g')' = (2ff')' = 2f'f' + 2ff'' = 2(f')^2 + 2ff''$,
3. $g''' = (g'')' = (2(f')^2 + 2ff')' = 4f'f'' + (2ff'')' = 4f'f'' + 2f'f'' + 2ff'''$

και άρα

$$g(0) = f(0)f(0) = 1, \; g'(0) = 2, \; g''(0) = 6, \; g'''(0) = 8 + 4 + 12 = 24$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ είναι το πολυώνυμο

$$1 + 2x + \frac{6}{2}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ 11, ΓΙΑ ΤΟ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝΑΔΕΣ