

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ, 4/9/2024

Άσκηση 1. (3+1=4 μον)

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x^3 - xy^2$.

(i) (1 μον) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης.

(ii) (1 μον) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (δηλαδή τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$).

(iii) (1 μον) Με χρήση του κριτηρίου της δεύτερης παραγώγου βρείτε τα τοπικά μέγιστα, τα τοπικά ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία της f . [Υπενθυμίζεται ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$]

(β) (1 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$. Εξετάστε αν η f έχει τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 2. (1+1,5+1,5=4 μον)

(α) (1 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$.

(β) (1,5 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx$.

[Υπενθυμίζεται η διάσπαση σε απλά κλάσματα $\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$]

(γ) (β) (1,5 μον) Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = 1 - \sin^3 t, \quad y(t) = \cos^3 t, \quad t \in [0, \pi/2]$$

[Υπενθυμίζεται ότι $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$]

Άσκηση 3. (3 μον)

(α) (1 μον) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$. [Υπενθυμίζεται ότι $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$]

(β) (0,5 μον) (0,5 μον) Υπολογίστε το $\sin(\arctan 1)$.

(γ) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g = f^2$ (δηλαδή της συνάρτησης $g(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$), αν το αντίστοιχο πολυώνυμο της f είναι $T(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

[Υπενθυμίζεται ότι το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης h τάξης $n = 3$ και κέντρου $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{3!}x^3$]