ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ, 3/7/2024

Άσκηση 1. (*2+1,5 =3,5 μον*) (α) (*2 μον*) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 1$.

(β) (*1,5 μον*) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$. (i) (*0,5 μον*) Δείξτε ότι τα σημεία $(0, 0)$ και $(\sqrt{2}, 0)$ είναι κρίσιμα σημεία της f. (ii) (*0,5 μον*) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. (iii) (*0,5 μον*) Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $(\sqrt{2}, 0)$.

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$. Συνεπώς

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0),\ (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = 4$ και $f_{yy}(x, y) = -4$. Άρα $\Delta(x, y) = 48x^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ στα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(β) (i) Έχουμε $f_x(x, y) = 8x - 4x^3$ και $f_y(x, y) = -4y^3$. Άρα $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Ομοίως $f_x(\sqrt{2}, 0) = f_y(\sqrt{2}, 0) = 0$.

(ii) $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) = -y^4 < 0$ για κάθε σημείο $(0, y) \neq (0, 0)$ ενώ $f(x, 0) = 4x^2 - x^4 > 0$ για κάθε $(x, 0) \neq (0, 0)$ με $|x| < 2$. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) \leq f(\sqrt{2}, 0) \Leftrightarrow 4x^2 - x^4 - y^4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq -4x^2 + x^4 + 4 + y^4 = (x^2 - 2)^2 + y^4$$

που ισχύει για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $(\sqrt{2}, 0)$.

Άσκηση 2. (*2,5+1=3,5 μον*) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) (*1 μον*) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$

(ii) (*1,5 μον*) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+25}\, dx$.

(β) (*1 μον*) Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 \ \text{ με } t \in [0, 1]$$

[Υπενθυμίζεται ότι $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$]

Λύση. (α) (i) Διασπάμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2+1)}$$

και άρα

$$A + B = 0, B + C = 0, A + C = 1$$

Συνεπώς $A = C = 1/2$, $B = -1/2$. Άρα

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)$$

Οπότε,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x$$

(ii) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx = \int \frac{x}{x^2+6x+9+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{x}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y = \frac{x+3}{4} \Rightarrow x = 4y-3$, $dx = 4dy$ οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx = \frac{4}{16}\int \frac{4y-3}{y^2+1}\,dy = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{3}{4}\arctan y$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+3)^2}{16}+1\right) - \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x+3}{4}\right)$$

(β) Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^4+t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(t^2+1)}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

Θέτουμε $u = t^2+1$, $du = 2tdt$ και έχουμε

$$L = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Άσκηση 3. (*2+1+1=4 μον*) (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) (*1 μον*) Υπολογίστε την παράγωγό της f και στην συνέχεια βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

(ii) (*1 μον*) Δείξτε ότι η f είναι η αντίστροφη της συνάρτησης του υπερβολικού ημιτόνου $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) (*1 μον*) Υπολογίστε το $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$.

(γ) (*1 μον*) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $T_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$ υπολογίστε την $f^{(n)}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ποιά είναι η $f^{(2024)}(0)$?

Λύση. (α) (i) $f'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Οπότε

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int_0^1 f'(x)\, dx = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

(ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω $y = \sinh^{-1} x$.

Τότε $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Θέτοντας $w = e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Επειδή $w = e^y > 0$ και $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x + \sqrt{x^2+1} &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

Άρα $y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(β) Έστω $\theta = \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\dfrac{3}{5}$. Όμως $\arccos x \in [0,\pi]$, για κάθε $x \in [-1,1]$ και άρα $\sin\theta \geq 0$. Συνεπώς $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right) = \dfrac{3}{5}$.

(γ) Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Άρα $T_n(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$ και συνεπώς $f(0) = 1, \quad \dfrac{f'(0)}{1!} = 2, \ \dfrac{f''(0)}{2!} = 3, ...$ και γενικά

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n+1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$f^{(n)}(0) = n!(n+1) = (n+1)!$$

Ειδικότερα, $f^{(2024)}(0) = 2025!$.