Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή ΗΜΜΥ, Σχολή ΕΜΦΕ
Μαθηματική Λογική, ακαδ. έτος 2023-24
Επιμέλεια ασκήσεων: Γ. Κολέτσος
Λύσεις 1ης σειράς γραπτών ασκήσεων
(προτασιακός λογισμός)

Άσκηση 1.
Ας θεωρήσουμε ότι συμβολίζουμε τις εξής προτάσεις της φυσικής γλώσσας με προτασιακές μεταβλητές:
Α σημαίνει "Η Λένα είναι ευτυχισμένη".
Β σημαίνει "Η Λένα ζωγραφίζει έναν πίνακα".
Γ σημαίνει "Ο Κώστας είναι ευτυχισμένος".
Δώστε την τυπική μορφή των παρακάτω προτάσεων:
1. Εάν η Λένα είναι ευτυχισμένη και ζωγραφίζει ένα πίνακα ο Κώστας δεν είναι ευτυχισμένος.
2. Εάν η Λένα είναι ευτυχισμένη τότε αυτή ζωγραφίζει ένα πίνακα.
3. Η Λένα είναι ευτυχισμένη μόνο εάν ζωγραφίζει έναν πίνακα.
4. Ικανή συνθήκη για είναι η Λένα ευτυχισμένη είναι να ζωγραφίζει έναν πίνακα.

Άσκηση 2.
Αποδείξτε ότι η παρακάτω έκφραση είναι προτασιακός τύπος με παρουσίαση του δέντρου κατασκευής του.

$$((A \vee B) \to ((\neg A) \to (B \wedge C)))$$

Άσκηση 3.
Το μήκος της έκφρασης $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ (όπου σ_i σύμβολου του αλφαβήτου) είναι n. Αποδείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε προτασιακούς τύπους με μήκος 2,3 ή 6 και ότι κάθε άλλο μήκος είναι σωστό.

Λύση: Έστω ϕ προτασιακός τύπος. Εάν ο ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε έχει μήκος 1. Διαφορετικά, εάν $\phi \equiv (\neg\psi)$ ή $\phi \equiv (\psi\blacklozenge\chi)$ για κάποιους προτασιακούς τύπους ψ, χ και $\blacklozenge \in \{\wedge, \vee, \to\}$, τότε εφόσον κάθε προτασιακός τύπος έχει μήκος ≥ 1, ο ϕ έχει μήκος ≥ 4, άρα τα μήκη 2, 3 δεν είναι εφικτά. Ειδικότερα, εάν $\phi \equiv (\neg\psi)$, τότε ο ϕ έχει μήκος 4 αν ο ψ είναι προτασιακή μεταβλητή και έχει μήκος ≥ 7, διαφορετικά (διότι σύμφωνα με το προηγούμενο ο ψ θα έχει μήκος ≥ 4). Διαφορετικά, εάν $\phi \equiv (\psi\blacklozenge\chi)$, τότε ο ϕ έχει μήκος 5 αν οι ψ, χ είναι προτασιακές μεταβλητές και έχουν μήκος ≥ 8 αν τουλάχιστον ένας δεν είναι προτασιακή μεταβλητή. Επομένως, τα μήκη 1, 4, 5 είναι εφικτά, ενώ τα μήκη 2, 3, 6 όχι.
Μένει να δείξουμε ότι κάθε μήκος $n \geq 7$ είναι εφικτό. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι τα μήκη $n{-}3$ και $n{-}2$ είναι εφικτά (που ισχύει για $n = 7$) και έστω ψ, χ προτασιακοί τύποι με μήκη $n{-}3$ και $n{-}2$, αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι τα μήκη $n, n+1, n+2$ είναι εφικτά. Πράγματι, ο $(\neg\psi)$ είναι

προτασιακός τύπος μήκους n και ο $(\neg\chi)$ είναι προτασιακός τύπος μήκους $n+1$. Επίσης, αν π είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε ο $(\chi\blacklozenge\pi)$ είναι προτασιακός τύπος μήκους $n+2$.

Άσκηση 4.

Αν U, V και W είναι (μη κενές) εκφράσεις της γλώσσας, αποδείξτε ότι το πολύ μία από τις εκφράσεις UV και VW είναι προτασιακός τύπος. [UV είναι η παράθεση των συμβολοσειρών U και V.]

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι κάθε γνήσιο τελικό τμήμα προτασιακού τύπου έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις.

Λύση: Θα δείξουμε με επαγωγή ότι κάθε γνήσιο τελικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις. Έστω ϕ προτασιακός τύπος. Εάν ο ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή, το ζητούμενο ισχύει, διότι ο ϕ δεν έχει γνήσιο τελικό τμήμα. Διαφορετικά, θα ισχύει ότι $\phi \equiv (\neg\psi)$ ή $\phi \equiv (\psi\blacklozenge\chi)$ για κάποιους προτασιακούς τύπους ψ, χ και $\blacklozenge \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι κάθε γνήσιο τελικό τμήμα των ψ, χ έχει περισσότερες δεξιές από ότι αριστερές παρενθέσεις. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Έστω $\phi \equiv (\neg\psi)$. Τότε κάθε γνήσιο τελικό τμήμα του ϕ έχει μία από τις εξής μορφές:), ψ'), ψ), $\neg\psi$), όπου ψ' γνήσιο τελικό τμήμα του ψ. Για την πρώτη μορφή το ζητούμενο ισχύει προφανώς. Για τη δεύτερη μορφή, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι το ψ' έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις, άρα το ίδιο ισχύει και για το ψ'). Για τις δύο τελευταίες μορφές, το ζητούμενο ισχύει διότι ο ψ, ως προτασιακός τύπος, έχει ίσο πλήθος από δεξιές και αριστερές παρενθέσεις.

• Έστω $\phi \equiv (\psi\blacklozenge\chi)$. Τότε κάθε γνήσιο τελικό τμήμα του ϕ έχει μία από τις εξής μορφές:), χ'), χ), $\blacklozenge\chi$), $\psi' \blacklozenge \chi$), $\psi\blacklozenge\chi$). Για τις τέσσερεις πρώτες μορφές ισχύουν τα αντίστοιχα με προηγουμένως. Για τις δύο τελευταίες μορφές έχουμε ότι οι ψ, χ έχουν ίσο πλήθος από αριστερές και δεξιές παρενθέσεις ενώ ο ψ' έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις, άρα και πάλι ισχύει το ζητούμενο.

Δείχνουμε τώρα το ζητούμενο της άσκησης. Εάν ο UV είναι προτασιακός τύπος και η V είναι μη κενή, τότε ως γνήσιο τελικό τμήμα του UV έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις. Τότε ο VW δεν μπορεί να είναι προτασιακός τύπος, διότι η V αποτελεί γνήσιο αρχικό τμήμα του και άρα θα έπρεπε να έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις. Ομοίως, εάν ο VW είναι προτασιακός τύπος, η V έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις και άρα ο UV δεν μπορεί να είναι προτασιακός τύπος.