Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή ΗΜΜΥ, Σχολή ΕΜΦΕ

Μαθηματική Λογική, 2023-24

Επιμέλεια ασκήσεων: Π. Ποτίκας

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.

Οι *υποτύποι* ενός προτασιακού τύπου ϕ είναι όλοι οι προτασιακοί τύποι (συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του ϕ) που <<σχηματίζονται>> με βάση τον επαγωγικό ορισμό ώστε να δημιουργηθεί ο τύπος ϕ, π.χ. οι ϕ_1, ϕ_2 είναι υποτύποι του $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, κλπ. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και κάθε προτασιακό τύπο ϕ, αν στο ϕ υπάρχουν n εμφανίσεις συνδέσμων, τότε υπάρχουν το πολύ $2n+1$ υποτύποι του ϕ.

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \Pi \mapsto \mathbb{N}$ που παίρνει έναν προτασιακό τύπο και επιστρέφει τον αριθμό των υποτύπων του. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο ϕ με πλήθος συνδέσμων n ότι ισχύει $f(\phi) \leq 2n+1$.

Επαγωγική βάση: Για $n = 0$, ο προτασιακός τύπος ϕ ταυτίζεται με μία προτασιακή μεταβλητή, επομένως ο μοναδικός υποτύπος του ϕ, είναι το ϕ, άρα ισχύει $f(\phi) = 1 \leq 2 * 0 + 1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ο προτασιακός τύπος έχει n συνδέσμους.

Αν $\phi = \neg\psi$ τότε $f(\phi) = 1 + f(\psi)$, καθώς οι υποτύποι του ϕ είναι ο ίδιος ο ϕ και όλοι οι υποτύποι του ψ. Επειδή ο προτασιακός τύπος ψ έχει $n-1$ συνδέσμους, από επαγωγική υπόθεση θα έχουμε $f(\psi) \leq 2(n-1)+1$. Επομένως, $f(\phi) = 1 + f(\psi) \leq 1 + 2(n-1) + 1 = 2n \leq 2n+1$.

Αν $\phi = \psi \diamond \theta$, όπου $\diamond$, οποιοσδήποτε από τους διθέσιους συνδέσμους, τότε $f(\phi) = 1 + f(\psi) + f(\theta)$, καθώς οι υποτύποι του ϕ είναι ο ίδιος ο ϕ και όλοι οι υποτύποι των ψ, θ. Επειδή οι προτασιακοί τύποι ψ, θ έχουν λιγότερους από n συνδέσμους, έστω n_1, n_2, αντίστοιχα, με $n = n_1 + n_2 + 1$, από επαγωγική υπόθεση θα έχουμε $f(\psi) \leq 2n_1 + 1, f(\theta) \leq 2n_2 + 1$. Επομένως, $f(\phi) = 1 + f(\psi) + f(\theta) \leq 1 + (2n_1+1) + (2n_2+1) = 2(n_1+n_2+1) + 1 \leq 2n+1$.

Άσκηση 2.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε υποσύνολο του S είναι ικανοποιήσιμο. Δείξτε ότι τότε κάθε υποσύνολο του $S \cup \{F\}$ είναι ικανοποιήσιμο ή κάθε υποσύνολο του $S \cup \{\neg F\}$ είναι ικανοποιήσιμο για οποιονδήποτε τύπο F.

Λύση:

Απόδειξη με αντίφαση. Ας υποθέσουμε ότι $S \cup \{F\}$ έχει μη ικανοποιήσιμο υποσύνολο M και $S \cup \{\neg F\}$ έχει ένα μη ικανοποιήσιμο υποσύνολο L. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M = M' \cup \{F\}$ και $L = L' \cup \{\neg F\}$ για κάποιο M', L', όπου $M' \subseteq S$ και $L' \subseteq S$ επειδή κάθε υποσύνολο του S είναι ικανοποιήσιμο. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το $M' \cup L'$ είναι ικανοποιήσιμο, από υπόθεση. Θεωρούμε τα σύνολα $M' \cup L' \cup \{F\}$ και $M' \cup L' \cup \{\neg F\}$. Τότε ένα από αυτά πρέπει να είναι ικανοποιήσιμο. (Έστω $\mathcal{A}$ με $\mathcal{A} \models M' \cup L'$. Τότε είτε $\mathcal{A} \models F$ είτε $\mathcal{A} \not\models F$.) Από αυτό συνεπάγεται ευθέως ότι είτε το M είτε το L είναι ικανοποιήσιμο, άρα αντίφαση.

Άσκηση 3.

Από τις ασκήσεις 3.3 των σημειώσεων, η άσκηση 1.

Λύση Απόδειξη στη θεωρία T ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, ..., \phi_n$ προτασιακών τύπων για τους οποίους ισχύουν τα ακόλουθα:

Για κάθε i, όπου $1 \leq i \leq n$, ο τύπος ϕ_i είναι είτε

1. ένα λογικό αξίωμα α1, α2

2. είτε ανήκει στην T, δηλ. είναι ένα μη λογικό αξίωμα της T,

3. είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, ..., \phi_n$ με $j < i$, και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \rightarrow \phi_i$

Αν η θεωρία T είναι ασυνεπής, δηλ. αν υπάρχει προτασιακός τύπος ψ, ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε η θεωρία T αποδεικνύει κάθε προτασιακό τύπο ϕ, δηλ. $T \vdash \phi$, για κάθε προτασιακό τύπο ϕ. Ας δούμε γιατί:

1. $\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$, στιγμιότυπο του α1, με ψ το δεδομένο που αποδεικνύεται και αυτό και η αντίφασή του

2. $\neg\phi \rightarrow \psi$, από 1. και MP

3. $\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)$, στιγμιότυπο του α1, με ψ το δεδομένο που αποδεικνύεται και αυτό και η αντίφασή του

4. $\neg\phi \rightarrow \neg\psi$, από 3. και MP

5. $(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi)$, στιγμιότυπο α2

6. $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi$, από 5, 2 και MP

7. ϕ, από 6, 4 και MP

Άσκηση 4.

Από τις ασκήσεις 3.3 των σημειώσεων, η άσκηση 2.

Λύση Έστω ϕ προτασιακός τύπος με μεταβλητές $B_1, ..., B_k$ και έστω απονομή αλήθειας V_*. Ορίζουμε

$$\psi_i = \begin{cases} A \vee \neg A, & \text{if } V_*(B_i) = T \\ A \wedge \neg A, & \text{if } V_*(B_i) = F \end{cases}$$

Έστω τώρα ϕ' το στιγμιότυπο του ϕ που προκύπτει από τον ϕ, αν κάθε εμφάνιση του B_i την αντικαταστήσουμε με ψ_i. Τότε για κάθε απονομή V έχουμε $\overline{V}(\phi') = \overline{V_*}(\phi)$ [Εύκολη επαγωγή στον ϕ].

Επειδή τώρα ο ϕ της άσκησης δεν είναι ταυτολογία, θα υπάρχει απονομή αλήθειας V_*, ώστε $\overline{V_*}(\phi) = F$. Αν κάνουμε την παραπάνω αντικατάσταση, θα αποκτήσουμε στιγμιότυπο ϕ' του ϕ, που σε κάθε απονομή V θα δίνει $\overline{V}(\phi') = F$, δηλ. ο ϕ' είναι αντίφαση. Εύκολα προκύπτει ότι από το T, ώστε $\phi' \in T$, προκύπτει ότι $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$.[Διότι $\phi' \rightarrow \psi$ και $\phi' \rightarrow \neg\psi$ ταυτολογία άρα $\vdash \phi' \rightarrow \psi, \vdash \phi' \rightarrow \neg\psi$, και βέβαια $T \vdash \phi'$, αφού $\phi' \in T$]

Άσκηση 5.

1. Δείξτε ότι κανένας από τούς δύο προτασιακούς τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο: $(\varphi \wedge ((\psi \rightarrow \tau) \wedge (\tau \rightarrow \psi)))$ και $((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee ((\neg\varphi) \wedge ((\neg\psi) \wedge (\neg\tau))))$

2. Είναι ο $(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ ταυτολογία;

3. (i) $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi \iff \Sigma \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$
(ii) $\sigma \vDash\dashv \tau \iff \vDash (\sigma \rightarrow \tau) \wedge (\tau \rightarrow \sigma)$

Λύσεις: 1. Ο προτασιακός τύπος ϕ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον ψ αν μία απονομή δίνει T στον ϕ και F στον ψ. Για τις περιπτώσεις της ασκήσεως πάρτε τις απονομές $V_1(\phi) = T, V_1(\tau) = V_1(\psi) = F$ και $V_2(\phi) = V_2(\tau) = V_2(\psi) = F$.

2. Ναι, με πίνακα αληθείας.

3. π.χ. το (i) αν $\Sigma, \phi \vDash \psi$ τότε αν V ικανοποιεί όλους τους τύπους του Σ τότε δεν είναι δυνατόν να μην ικανοποιεί το $\phi \to \psi$ αφού αυτό θα προϋπέθετε ότι ικανοποιεί το ϕ και όχι το ψ, αδύνατο από υπόθεση. Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις.