Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή ΗΜΜΥ, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μαθηματική Λογικής, 2023-24

Επιμέλεια ασκήσεων: Γ. Κολέτσος

Λυμένες ασκήσεις στον κατηγορομητατικό λογισμό

Άσκηση 1.

α2) Για κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$ και αποτίμηση s, υποθέτοντας την $\vDash_{\mathcal{A}} \forall x(\phi \to \psi)[s]$ (Υπ1) μπορούμε να συμπεράνουμε την $\vDash_{\mathcal{A}} (\phi \to \forall\psi)[s]$ η οποία ισχύει αν υποθέτοντας την $\vDash_{\mathcal{A}} \phi[s]$ (Υπ2) έπεται η $\vDash_{\mathcal{A}} \forall x\psi[s]$ (συμπέρασμα). Το συμπέρασμα όμως ισχύει ανν για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\vDash_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)]$ (*) Παίρνουμε λοιπόν τυχόν στοιχείο $a \in |\mathcal{A}|$. Από Υπ1 έχουμε $\vDash_{\mathcal{A}} (\phi \to \psi)[s(x/a)] \Leftrightarrow \vDash_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)] \Rightarrow \vDash_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)]$ αλλά αν $\vDash_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)]$ τότε η αποτίμηση $s(x/a)$ είναι ίδια με την s αφού στον τύπο ϕ δεν εμφανίζεται ελεύθερο το x. Άρα $\vDash_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)] \Rightarrow \vDash_{\mathcal{A}} \phi[s]$ και επειδή $\vDash_{\mathcal{A}} \phi[s]$ ισχύει θα ισχύει και η $\vDash_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)]$. Άρα από την ισοδύναμη διατύπωση της Υπ1 παίρνουμε ότι $\vDash_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)]$ πράγμα που μας εξασφαλίζει τη συνθήκη (*).

Άσκηση 2.(Από σημειώσεις, σελ 61, ασκ. 4.3/2)

Αν ο τύπος ϕ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας τότε θα υπάρχει προτασιακός τύπος χ με προτασιακές μεταβλητές $B_1, B_2, \ldots, B_k$, στην οποία αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές αυτές, αντίστοιχα με κάποιους τύπους $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$, θα προκύψει ο ϕ (συμβολίζουμε $\phi \equiv \chi[B_1/\phi_1, \ldots, B_k/\phi_k]$). Ο χ θα είναι προτασιακή ταυτολογία. Άρα θα υπάρχει τυπική προτασιακή απόδειξη του $\chi, \vdash \chi$, δηλ. $\chi_1, \ldots, \chi_n \equiv \chi$ είναι τυπική απόδειξη στον προτασιακό λογισμό μόνο με τη χρήση λογικών αξιωμάτων. Αλλά αν $C_1, \ldots, C_n$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στην απόδειξη αυτή, τότε αν αντικαταστήσουμε τις $B_1, \ldots, B_k$ με $\phi_1, \ldots, \phi_k$ [έχουμε $\{B_1, \ldots, B_k\} \subseteq \{C_1, \ldots, C_n\}$] και τις υπόλοιπες με οποιουσδήποτε τύπους θα δούμε ότι η απόδειξη αυτή μετατρέπεται σε απόδειξη του κατηγορηματικού λογισμού, διότι π.χ. το στιγμιότυπο του $\chi_1 \to (\chi_2 \to \chi_1)$ γίνεται αξίωμα Α1 του κατηγορηματικού λογισμού (το ίδιο ισχύει και για τα Α2, Α3) και η εφαρμογή του MP διατηρείται εφαρμογή του MP.

Άσκηση 3.

(Από σημειώσεις, σελ 61, ασκ. 4.3/3) Με αντιπαράδειγμα. Αν πάρουμε την ερμηνεία $\mathcal{A} =< \mathbb{N}, >^2 \;>$, όπου το $>^2$, είναι η σχέση μεγαλύτερο στους φυσικούς αριθμούς, τότε η υπόθεση (αριστερό μέλος της συνεπαγωγής) της πρότασης λέει ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας μεγαλύτερος, που ισχύει, ενώ το συμπέρασμα (δεξί μέλος) ότι υπάρχει ένας φυσικός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους φυσικούς, κάτι που δεν ισχύει. Άρα όλη η πρόταση είναι ψευδής.

Άσκηση 4.(Από σημειώσεις, σελ 61, ασκ. 4.3/9)

Έστω $\mathcal{A}$ και s, πρέπει να ισχύει:

$\vDash_{\mathcal{A}} \exists x(\phi \to \forall x\phi)[s]$

θα πρέπει να υπάρχει κάποιο $d \in |\mathcal{A}|$ ώστε:

$$\boxed{\text{εάν } \vDash_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)] \text{ τότε } \vDash_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s(x/d)]}(*) \tag{1}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Ισχύει ότι $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s(x/d)]$, δηλ. για κάθε $d \in |\mathcal{A}| \models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)(x/d)]$ (ισοδύναμα $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)]$). Τότε το οποιοδήποτε $d \in |\mathcal{A}|$ είναι ένα d για το οποίο ισχύει το (*).

2. Δεν ισχύει $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s(x/d)]$. Τότε υπάρχει $d \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\not\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)]$. Αλλά για αυτό το d ισχύει το (*) (αφού η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ψευδής).

Το παράδοξο του πότη:

“Σε κάθε μπαρ υπάρχει κάποιος που αν πίνει, πίνουν όλοι ...”

Έστω $\pi(x) \equiv$“ ο x πίνει” . Τότε ισχύει ότι $\exists x(\pi(x) \to \forall x\pi(x))$