20/02/2024

Ασκήσεις

① Να λυθεί η εξίσωση $z^6 = -1$.

Λύση: Το z^6+1 έχει πραγματικούς συντελεστές κι κι εμφανίζονται μόνο δυνάμεις του z με άρτιο εκθέτη.

Άρα, εάν $\rho \in \mathbb{C}$ ρίζα της εξίσωσης, τότε οι

$$\pm \rho, \quad \pm \bar{\rho}$$

είναι ρίζες.

Παρατηρώ ότι $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$\Rightarrow$ οι $\pm i$ είναι ρίζες.

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi} = \left(e^{i\pi/6}\right)^6$$

δηλ. ο $\rho = e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

είναι ρίζα της εξίσωσης

$\Rightarrow$ οι $\pm\rho$, $\pm\bar{\rho}$ είναι ρίζες.

Τελικά, οι ρίζες της $z^6 = -1$ είναι οι

$$\pm i, \quad \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

(2) Έστω $a, z \in \mathbb{C}$ με $|a| < 1$, $|z| = 1$. Θέτουμε

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$ Να δ.ο. $|w| = 1$.

Λύση: $|\bar{a} \cdot z| = |\bar{a}| \cdot |z| = |a| < 1$

$\Rightarrow$ $1 - \bar{a} \cdot z \neq 0$.

Αρκεί να δ.ο. $\bar{w} = \frac{1}{w}$ ($|w|^2 = w \cdot \bar{w}$).

$$\bar{w} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{1 - a\bar{z}} = \frac{\frac{1}{z} - \bar{a}}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} = \frac{1}{w}. \quad \boxtimes$$

③ Να λυθεί η εξίσωση $e^z = \sqrt{3} + i$.

Λύση: $|\sqrt{3} + i| = 2 \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) =$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\pi/6} = e^{\ln 2} \cdot e^{i\pi/6}$$

$$= e^{\ln 2 + i\pi/6}.$$

Η εξίσωση γράφεται $e^z = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad z = \ln 2 + \frac{i\pi}{6} + 2k\pi i$$

Ρίζες: $\ln 2 + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

④ Να βρεθεί το
$$\max\{|z^2+z-1| : |z|=1\},$$
καθώς κ' τα z στα οποία το max λαμβάνεται.

Λύση: Για $|z|=1$,
$$|z^2+z-1| \leq |z^2|+|z|+|-1| = 3$$
Το 3 δεν είναι κατ' ανάγκη max!!

Για $|z|=1$, έχουμε
$$|z^2+z-1| = \left|z\left(z+1-\frac{1}{z}\right)\right| =$$
$$= |z|\cdot|z+1-\bar{z}| = |1+z-\bar{z}|$$
$$= |1+2i\,\mathrm{Im}z| =$$

$$= \sqrt{1+4(\operatorname{Im} z)^2}$$

$|z| = 1 \Rightarrow \quad z = e^{i\varphi}$, όπου $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad |z^2 + z - 1| = \sqrt{1+4\sin^2\varphi} \leq \sqrt{5}$$

Το "=" λαμβάνεται όταν $\sin^2\varphi = 1$

δηλ. $\sin\varphi = \pm 1 \Leftrightarrow \varphi = \pm \pi/2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z = \pm i}$$

Άρα, το max $= \sqrt{5}$ και λαμβάνεται στα $\pm i$.

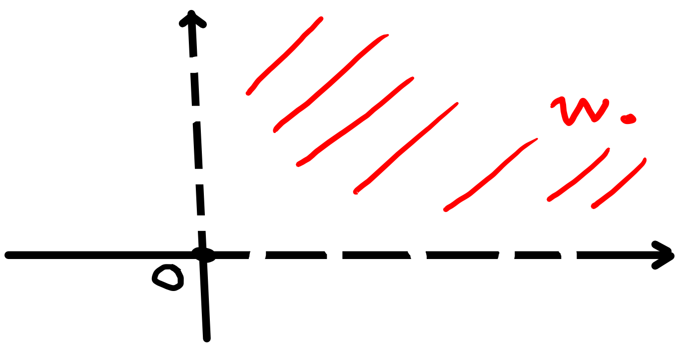
21/02/2024.

Ασκήσεις.

① Να σχεδιάσετε στο επίπεδο το σύνολο

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad 0 < \operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Λύση: Θέτω $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, $z \in A$. Τότε, $0 < \operatorname{Arg} w < \pi/2$.



$\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$

$$w = \frac{(z-i)\overline{z+i}}{(z+i)(\overline{z+i})} =$$

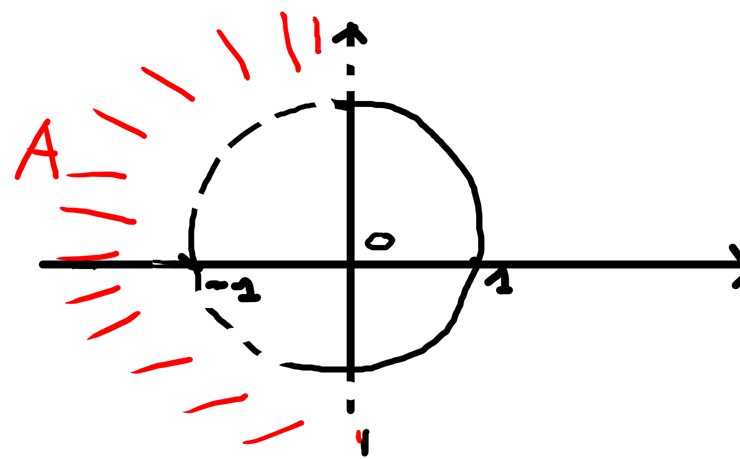
$$= \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2} =$$

$$= \frac{|z|^2 - iz - i\bar{z} - 1}{|z+i|^2} = \frac{(|z|^2 - 1) - 2i\,Re(z)}{|z+i|^2} \Rightarrow$$

$$w = \underbrace{\frac{|z|^2 - 1}{|z+i|^2}} + i\underbrace{\left[\frac{-2Re(z)}{|z+i|^2}\right]}$$

$$Re\, w > 0 \iff |z|^2 - 1 > 0 \iff \underline{|z| > 1}$$

$$Im\, w > 0 \iff \underline{Re(z) < 0}$$



② (και σαν θεωρία)

Να δ.ο. $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \le |z| + |w|$.
Εάν $z \neq 0$, $w \neq 0$, τότε
το "$=$" ισχύει ανν $\exists\ c>0 \mid w = c\cdot z$.

Λύση: $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 =$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| - \left(|z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})\right)$$

$$= 2\left[|z||w| - \mathrm{Re}(z\bar{w})\right]. \quad (1)$$

[Γενικά: εάν $a \in \mathbb{C}$, τότε $|\mathrm{Re}(a)| \le |a|$
$|\mathrm{Im}(a)| \le |a|$].

$$\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad (|z|+|w|)^2 \geq |z+w|^2 \Longleftrightarrow \underline{|z|+|w| \geq |z+w|}.$

Υποθέτουμε ότι $|z+w| = |z|+|w| \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \quad \underline{\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z|\cdot|w|.} \quad (2)$

$\forall c \geq 0, \quad |w-cz|^2 = |w|^2 + c^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(cz\cdot\bar{w})$

$= |w|^2 + c^2|z|^2 - 2c\operatorname{Re}(z\bar{w}) \overset{(2)}{=}$

$= |w|^2 + c^2|z|^2 - 2c|z|\cdot|w|$

$= (|w| - c|z|)^2.$ Θέτω $c = |w|/|z|$

$\Longrightarrow \quad w = c\cdot z.$

③ $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$, $\quad \big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$.

Πότε ισχύει το "="; (για $z \neq 0$, $w \neq 0$).

(Η — W).

④ Να δ.ο.

$$\left(\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\varphi)}{1-i\tan(n\varphi)}, \quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$$

γ' $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}\right)$.

<u>Λύση:</u>

$$\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi} \Rightarrow \left(\frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^n =$$

$$= \left(e^{2i\varphi}\right)^n = e^{2in\varphi} = \frac{e^{in\varphi}}{e^{-in\varphi}} =$$

$$= \frac{\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}{\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)} = \frac{1 + i\tan(n\varphi)}{1 - i\tan(n\varphi)}.$$

$\boxtimes$

(5) (a) Εάν $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, $Re(w) \neq 1$, να δ.ο.

$$\frac{w+1}{w-1} = i\,\frac{Im w}{Re w - 1}.$$

Λύση:
$$\frac{w+1}{w-1} = \frac{(w+1)(\bar{w}-1)}{|w-1|^2} = \frac{|w|^2 - w + \bar{w} - 1}{|w|^2 + 1 - 2Re(w)}$$

$$= -\frac{w - \bar{w}}{2 - 2Re w} = -\frac{2i\, Im w}{2(1 - iRe w)} = i\,\frac{Im w}{Re w - 1}.$$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $w^6 = -1$

(έχει λυθεί)

Ρίζες: $\pm i$, $\pm \rho$, $\pm \bar{\rho}$, $\rho = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $(z+1)^6 + (z-1)^6 = 0$

Λύση: Για $z \neq 1$, η εξίσωση γράφεται

$$\Big(\underbrace{\frac{z+1}{z-1}}_{w}\Big)^6 = -1 \quad \text{ή} \quad w^6 = -1$$

$$\Rightarrow \quad w = \pm i, \ \pm \rho, \ \pm \bar{\rho}, \quad \rho = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$w = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow \ldots \quad z = \frac{w+1}{w-1} \overset{(a)}{=}$$

$$= i \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w - 1}$$

$k \cdot 2 \cdot \pi \cdot$

$\Rightarrow z = \ldots$