ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ CAUCHY ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Πρόταση 1: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0<r<R\leq\infty$ και f ολόμορφη στον δίσκο $D(z_0, R)$.

Εάν $|z-z_0|<r$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

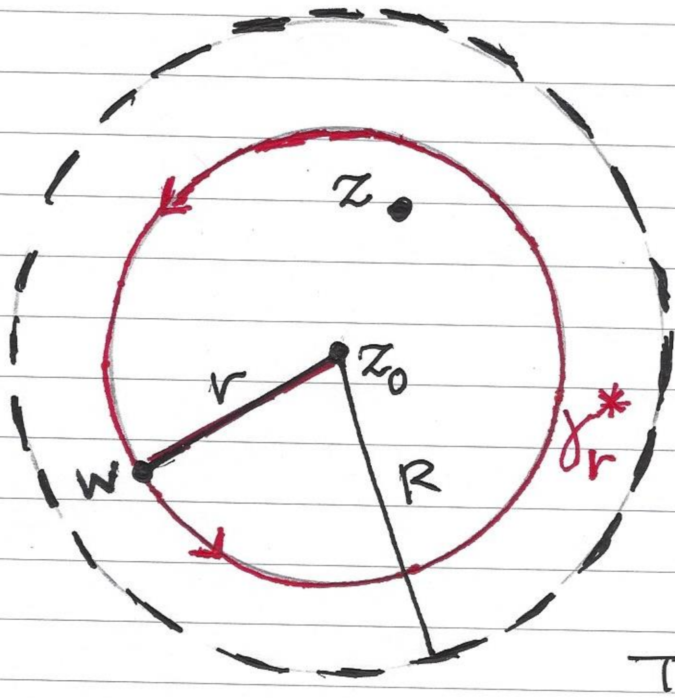
όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



$\gamma_r^* \subset D(z_0, R)$

$|z - z_0| < r$

$\Longrightarrow \quad z \in \operatorname{int}\gamma_r^*.$

Από Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\,dw.$$

$\forall w \in \gamma_r^*$, έχουμε $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$$\xrightarrow[\text{Σειρά}]{\text{Γεωμετρ.}} \quad \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Αλλά, $\forall\, w \in \gamma_r^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \right| =$$

$$= \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} |z-z_0|^n$$

$$\leq \frac{M_r}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n,$$

όπου $M_r = \max\limits_{w\in\gamma_r^*} |f(w)|$.

όμως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n < \infty,$$

αφού $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$.

Από την Πρότ. III. 3 του αρχείου

ΣΕΙΡΕΣ–ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.

παίρνουμε

$$\int_{\gamma_r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n.$$

$\boxtimes$

Θεώρημα 2 (Taylor)

Έστω $0 < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στο δίσκο $D(z_0, R)$ $(z_0 \in \mathbb{C})$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι
$$f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots, \; k \in \mathbb{N},$$
στον $D(z_0, R)$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

$\forall \; z \in D(z_0, R)$.

Επιπλέον, αν $0 < r < R$,

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $0<r<R$

και $\gamma_r(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Θέτουμε
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,\ n\in\mathbb{N}.$$

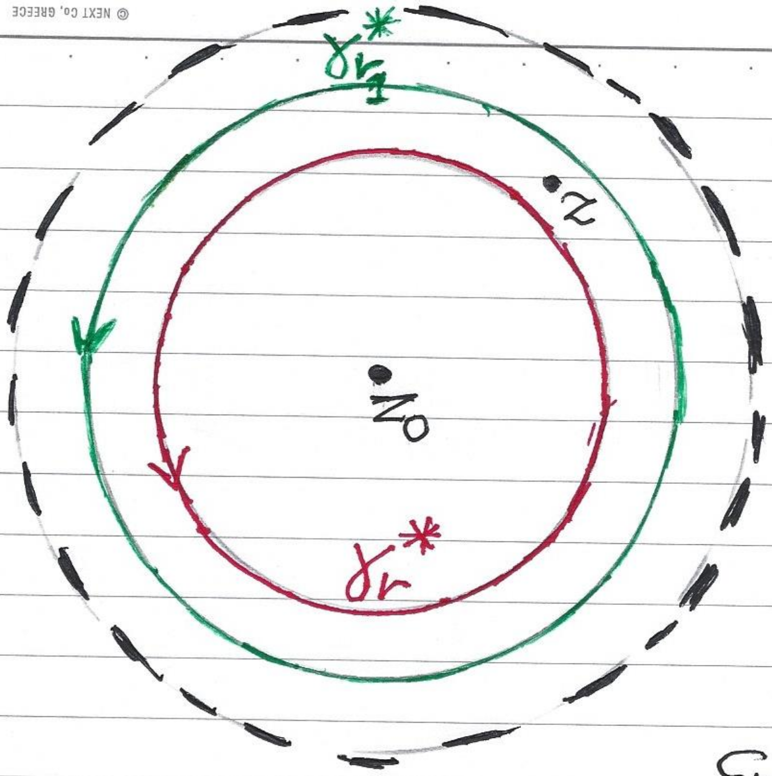
Θα δ.ο.
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \forall z\in D(z_0,R).$$

→ Εάν $|z-z_0|<r$, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 1.

→ Έστω $r\le|z-z_0|<R$.

Επιλέγουμε $r_1>0$ με
$$|z-z_0|<r_1<R$$

και θέτουμε
$$\gamma_{r_1}(t)=z_0+r_1e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$



Λόγω της Πρότ. 1, ισχύει

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

$n\in\mathbb{N}$.

Η συνάρτηση $w \longmapsto \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*_{r_1}$, γ^*_r, οπότε από την Αρχή Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw = a_n,$$

$n\in\mathbb{N}$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

$$\forall z\in D(z_0,R).$$

Από το **Πόρισμα II.4** του αρχείου

"ΣΕΙΡΕΣ- ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ- ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.",

παίρνουμε ότι υπάρχουν όλων

των τάξεων οι παράγωγοι

$$f^{(k)},\quad k\in\mathbb{N}$$

στον δίσκο $D(z_0,R)$ και

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},\quad k\in\mathbb{N}$$

(ή)

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw,$$

$$k\in\mathbb{N}.$$

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα 3:</u> Εάν f ακέραια, δηλ. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε $\forall\, z_0, z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $\mathbb{C} = D(z_0, R)$ για $R = \infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θ. 2. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ <u>ανοικτό</u> και $f \in \mathcal{H}(U)$. Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ και είναι όλες ολόμορφες στο U.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Ισχυρισμός:</u> $\forall g \in \mathcal{H}(U)$, ισχύει $g' \in \mathcal{H}(U)$.

[Πράγματι· έστω $z_0 \in U \Rightarrow \exists\, R \in (0, \infty) /$

$$D(z_0, R) \subset U$$

$\xRightarrow{\Theta.2}$ $\exists$ η g'' στον $D(z_0, R)$

$\Longrightarrow$ g' διαφορίσιμη στο z_0.]

Τώρα, λόγω του ισχυρισμού παίρνουμε

$f' \in \mathcal{H}(U) \xRightarrow{\text{(Ισχυρισμός)}}$

$\Longrightarrow f'' \in \mathcal{H}(U)$

$\xRightarrow{\text{Ισχυρ.}} f''' \in \mathcal{H}(U)$

κ.ο.κ.

$\boxtimes$

Πρόταση 5 (ολοκλ. τύποι Cauchy για παραγώγους):

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με

εσωτερικό $U = \mathrm{int}\,\gamma^*$ κ'

$$f : U \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$$

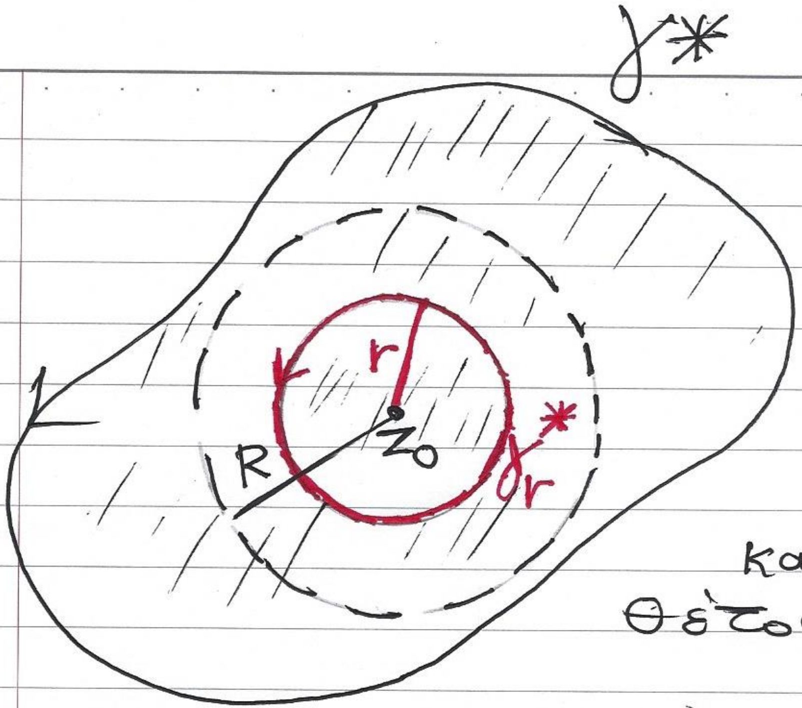
με $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, $f|_{\gamma^*}$ συνεχής.

Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



Επιλέγουμε $R\in(0,\infty) \mid D(z_0,R)\subset U$ και $r\in(0,R)$.

Θέτουμε

$$\gamma_r(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

Λόγω του Θ. 2, $\exists$ οι παράγωγοι όλων των τάξεων στον $D(z_0,R)$ και ισχύει

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Αλλά, η συνάρτηση

$$w\longmapsto\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_r^* $\xRightarrow{\text{Αρχή Παραμόρφ.}}$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$\boxtimes$

Σειρές Taylor γύρω από το $z_0=0$ βασικών συναρτήσεων

I. $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$. Η f είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ $\xrightarrow[(\Theta.\text{ Taylor})]{\Theta.2}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{C}.}$$

II. $f(z)=\sin z$, $z\in\mathbb{C}$.

$\forall z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}i^n z^n$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)!}i^{2n+1}\cdot z^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{i}\, i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots$$

III. $f(z) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = (\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z^{2n+1}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1)\, z^{2n}$$

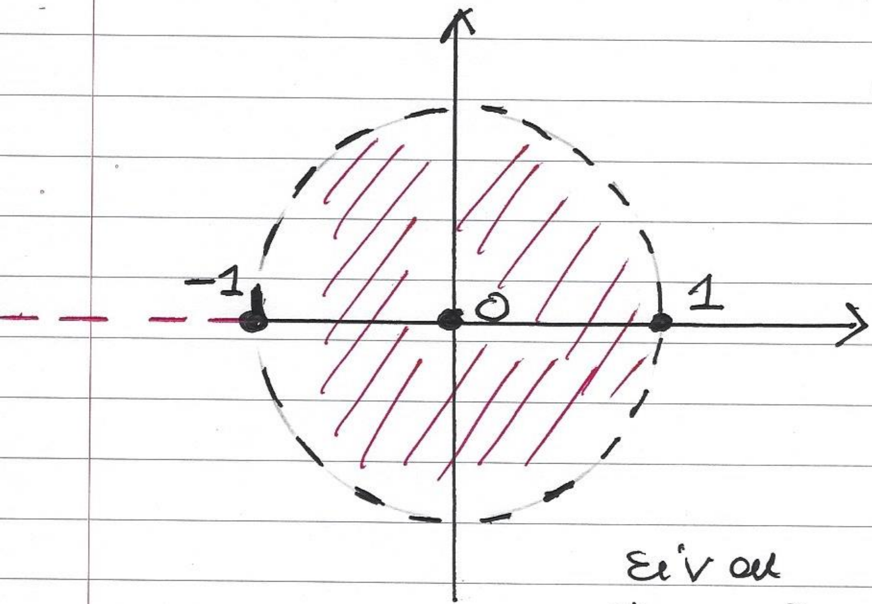
$$\Longrightarrow \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \cdots$$

IV. $f(z) = \mathrm{Log}(1+z), \quad z \neq -1.$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο

$$U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].$$



Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος κέντρου 0 που περιέχεται στο U είναι ο

$$D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}.$$

Επομένως, ο $D(0,1)$ είναι ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος πάνω στον οποίο η f έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0.

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

$$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \frac{1}{1+z},$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2},$$

$$f'''(z) = \frac{1\cdot 2}{(1+z)^3},$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+z)^4}$$

κ.ο.κ.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+z)^n}$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Εφ' όσον $f(0)=0$, παίρνουμε

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z|<1.}$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

Ασκήσεις:

(1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z} dz, \text{ όπου } \gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (R > 0).$$

<u>Λύση:</u> $\forall z \in \gamma_R^*$, $\quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = R^2$

$$\Longrightarrow \bar{z} = \frac{R^2}{z}$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z} dz = R^2 \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{z^2} dz =$$

$$= R^2 \cdot 2\pi i \left(e^z\right)'\Big|_{z=0} = 2\pi i R^2.$$

---

(2) Να υπολογίσετε το $\int_\gamma f(z) dz$,

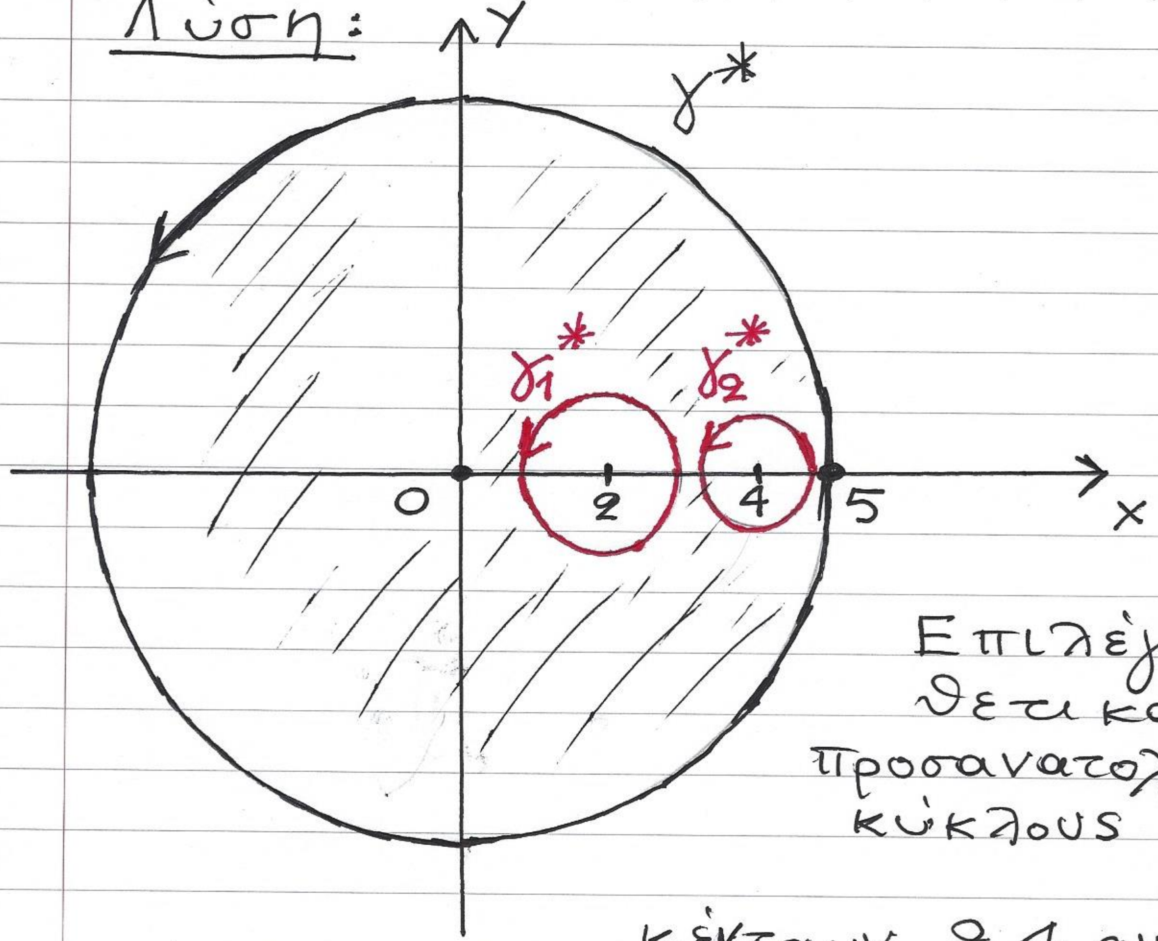
όπου

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2 (z-4)}$$

και

$$\gamma(t) = 5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση:



Επιλέγουμε θετικά προσανατολισμένους κύκλους γ_1, γ_2 κέντρων 2, 4 αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_1^*, γ_2^*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{z-4}}{(z-2)^2}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{z-4}\right]'\Bigg|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \, \frac{\pi\cos(\pi z)(z-4) - \sin(\pi z)}{(z-4)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \, \frac{\pi\cos(2\pi)(-2) - \sin(2\pi)}{(-2)^2}$$

$$= 2\pi i \, \frac{(-2\pi)}{4} = -\pi^2 i,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}}{z-4}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}\right]\Bigg|_{z=4}$$

$$= 2\pi i \, \frac{0}{4} = 0.$$

Άρα, $\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\pi^2 i + 0 = -\pi^2 i.$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$|f(z)| \leq a|z| + b, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου $a, b > 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall R > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \ \frac{aR+b}{R^n}$$

(ii) $\exists \ A, B \in \mathbb{C}$ ώστε

$f(z) = Az + B$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|A| \leq a$, $|B| \leq b$.

Λύση:

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Τότε,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

(Σημ. ότι f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$!)

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$,

$$\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{a|z|+b}{R^{n+1}} = \frac{aR+b}{R^{n+1}}$$

$$\xrightarrow[\alpha\nu\iota\sigma.]{ML} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} R \, \frac{aR+b}{R^{n+1}}$$

$$= n! \, \frac{aR+b}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall R > 0.$$

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε,

$\forall R > 0,$
$$|f^{(n)}(0)| \overset{(i)}{\leq} n! \, \frac{aR+b}{R^n} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Επειδή f ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, το Θ. Taylor δίνει ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0) z.$$

$\forall R > 0,$
$$|f(0)| \overset{(i)}{\leq} aR + b \xrightarrow{R \to 0^+} b$$

οπότε $\underline{|f(0)| \leq b.}$

Επιπλέον, $\forall R>0$,

$$|f'(0)| \leq \frac{aR+b}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} a$$

οπότε $\underline{|f'(0)| \leq a}$.

Θέτουμε $A=f'(0)$, $B=f(0)$.

(4) Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση

$f: D(0,1) \to D(0,1)$, όπου
$D(0,1) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

Να δείξετε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2},$$

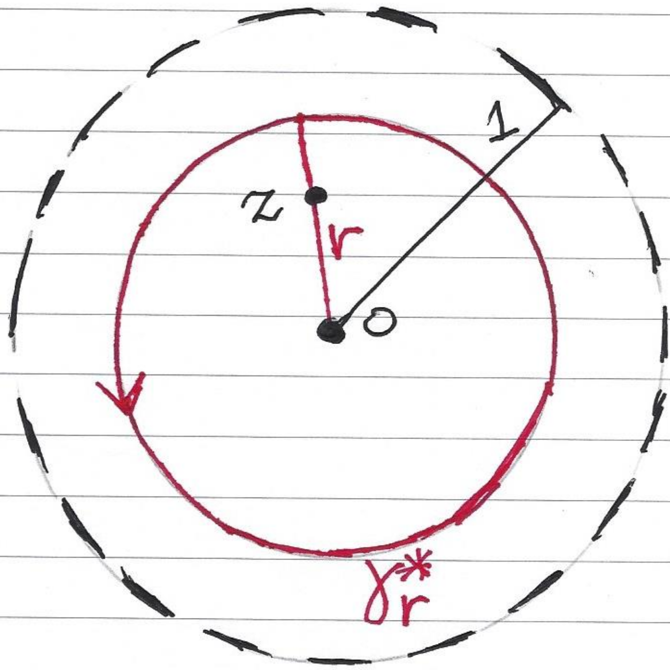
$\forall\, z\in D(0,1)$.

<u>Λύση</u>: Έστω $z\in D(0,1)$. Επιλέγουμε $r>0$ με $|z|<r<1$ κ' θέτουμε

$$\gamma_r(t) = re^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Τότε, $z\in \operatorname{int}\gamma_r^*$ και

$$\gamma_r^* \subset D(0,1).$$



Από τους ολοκλ. τύπους Cauchy παίρνουμε

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

$\forall\, w\in\gamma_r^*$, $\quad |f(w)|<1$ και

$$|w-z|\geq |w|-|z|=r-|z|$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{f(w)}{w-z}\right|<\dfrac{1}{r-|z|}, \\[2ex] \left|\dfrac{f(w)}{(w-z)^2}\right|\leq\dfrac{1}{(r-|z|)^2}\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{ML-ανισ.}}\begin{cases}|f(z)|\leq\dfrac{1}{2\pi}\,2\pi r\,\dfrac{1}{r-|z|}=\dfrac{r}{r-|z|}, \\[2ex] |f'(z)|\leq\dfrac{r}{(r-|z|)^2}.\end{cases}$$

Οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν $\forall r$ τέτοιο με

$$|z| < r < 1.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 1$, προκύπτει ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$$

(5) Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{z^2+z}{(z-1)^2}$, γύρω από το σημείο $z_0 = -1$.

<u>Λύση:</u> Θέτω $w = z - z_0 = z+1$

$\Longrightarrow z = w-1$, οπότε

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{(w-1)w}{(w-2)^2}$$

$$= \frac{w^2-w}{w^2-4w+4} =$$

$$= \frac{w^2-4w+4+3w-4}{w^2-4w+4}$$

$$= 1 + \frac{3w-4}{(w-2)^2} = 1 + \frac{3(w-2)+2}{(w-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{w-2} + \frac{2}{(w-2)^2}.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}} \quad \underline{\underline{\text{για } \left|\frac{w}{2}\right|<1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{(w-2)^2} = -\left(\frac{1}{w-2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

για $\left|\frac{w}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 2,$

οπότε

$$f(z) = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n}}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

για $|z+1| < 2$.

(6) Να δείξετε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

<u>Λύση:</u> $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |e^z - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} =$$

$$= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$= |z| e^{|z|}.$$

Άρα, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

(7) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n} .$$

<u>Λύση:</u> Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{n \cdot 3^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{i-2}{3}\right)^n.$$

Είναι $|i-2|^2 = 1 + 4 = 5 < 9$

$$\Rightarrow \left|\frac{i-2}{3}\right| < 1, \text{ οπότε}$$

το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$-\operatorname{Log}\left(1+\frac{i-2}{3}\right)=-\operatorname{Log}\left(\frac{i+1}{3}\right)$$

$$=-\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-i\frac{\pi}{4}.$$

(8) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos(n\theta), \text{ για } 0<r<1,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>: Για $|z|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' =$$

$$= z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{1}{1-z}-1\right)'$$

$$=\frac{z}{(1-z)^2}.$$ Για $z=re^{i\theta}$,

έχουμε $|z|=r<1$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n e^{in\theta} = \frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2} =$$

$$= \frac{re^{i\theta}\,(1-re^{-i\theta})^2}{|1-re^{i\theta}|^4}$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\, e^{i\theta}\left(1+r^2e^{-2i\theta}-2re^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\left(e^{i\theta}+r^2e^{-i\theta}-2r\right)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\Big[(1+r^2)\cos\theta-2r+$$
$$+\, i(1-r^2)\sin\theta\Big]$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nr^n\cos(n\theta) =$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{|1-re^{i\theta}|^4}.$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{\left[(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta\right]^2}.$$