ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ. CAUCHY-GOURSAT

Θ. 1. (Αρχή Παραμόρφωσης)

Έστω γ_1, γ_2 θετικά προσανατολισμένες, απλές κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες ώστε

$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^*$$

και $G = \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$ το πεδίο μεταξύ των γ_1^*, γ_2^*.

Έστω $f : G \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{C}$, ώστε:

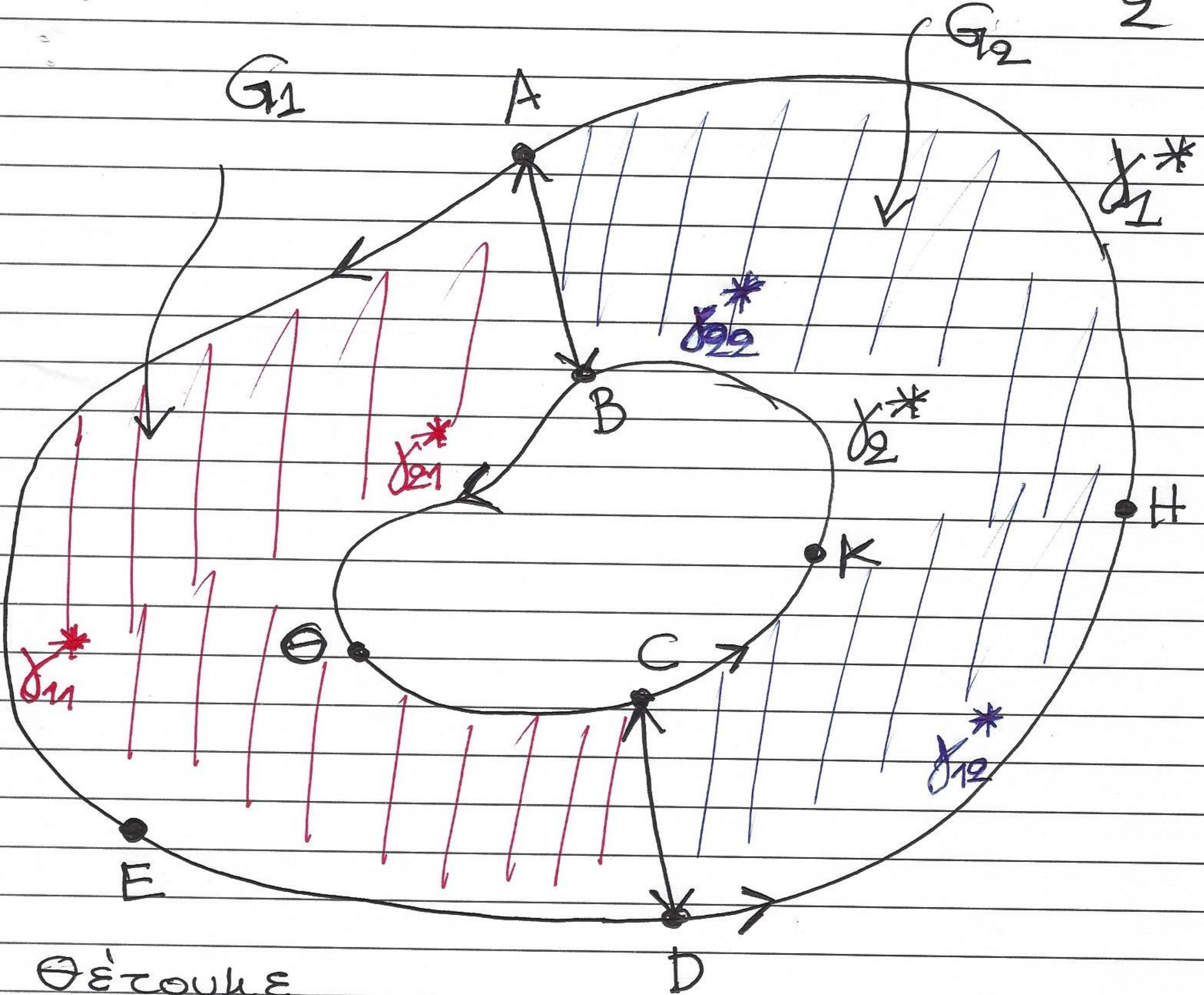
- f ολόμορφη στο G
- f συνεχής στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

Τότε,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



Θέτουμε

$$\gamma_{11} = A \xrightarrow{\gamma_1} E \xrightarrow{\gamma_1} D, \quad \gamma_{12} = D \xrightarrow{\gamma_1} H \xrightarrow{\gamma_1} A,$$

$$\gamma_{21} = B \xrightarrow{\gamma_2} \Theta \xrightarrow{\gamma_2} C, \quad \gamma_{22} = C \xrightarrow{\gamma_2} K \xrightarrow{\gamma_2} B.$$

Τότε,

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}, \quad \gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}.$$

Θέτουμε

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} + \overrightarrow{DC} - \gamma_{21} + \overrightarrow{BA}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{12} + \overrightarrow{AB} - \gamma_{22} + \overrightarrow{CD}.$$

Τα $G_1 = \mathrm{int}\,\Gamma_1$, $G_2 = \mathrm{int}\,\Gamma_2$ είναι <u>απλώς συνεκτικά πεδία.</u>

Εφαρμόζοντας το Θ. Cauchy–Goursat (ισχυρή εκδοχή) για τις καμπύλες Γ_1, Γ_2 παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \displaystyle\int_{\gamma_{11}} f + \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{-\gamma_{21}} f + \int_{\overrightarrow{BA}} f. \quad (1) \\ 0 = \displaystyle\int_{\gamma_{12}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f + \int_{-\gamma_{22}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f. \quad (2) \end{cases}$$

Είναι $\gamma_{11} + \gamma_{12} = \gamma_1$,

$$(-\gamma_{21}) + (-\gamma_{22}) = -\gamma_2,$$

$$0 = \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f = \int_{\overrightarrow{BA}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f.$$

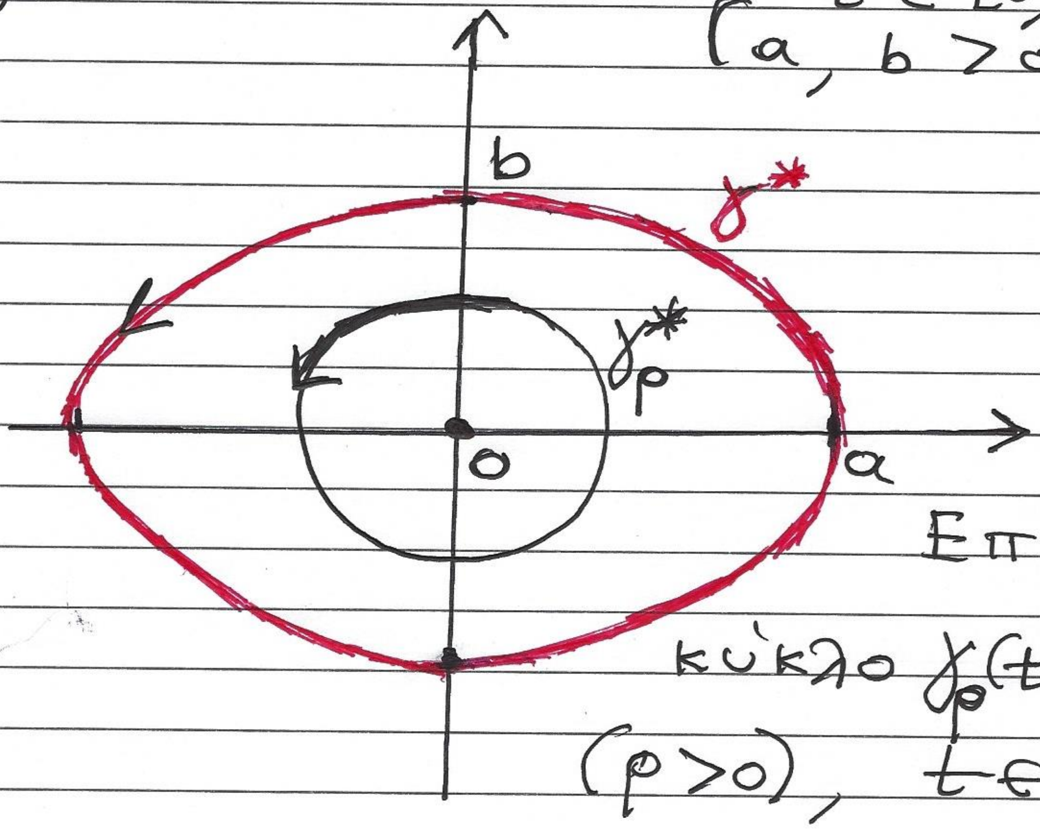
(1) + (2) $\Longrightarrow$

$$0 = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f. \quad \boxtimes$$

Εφαρμογή:

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = ?$, $\gamma(t) = a\cos t + i(b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(a, b > 0)$.



Επιλέγουμε κύκλο $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$ $(\rho > 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

με $\gamma_\rho^* \subset \operatorname{int}\gamma^*$.

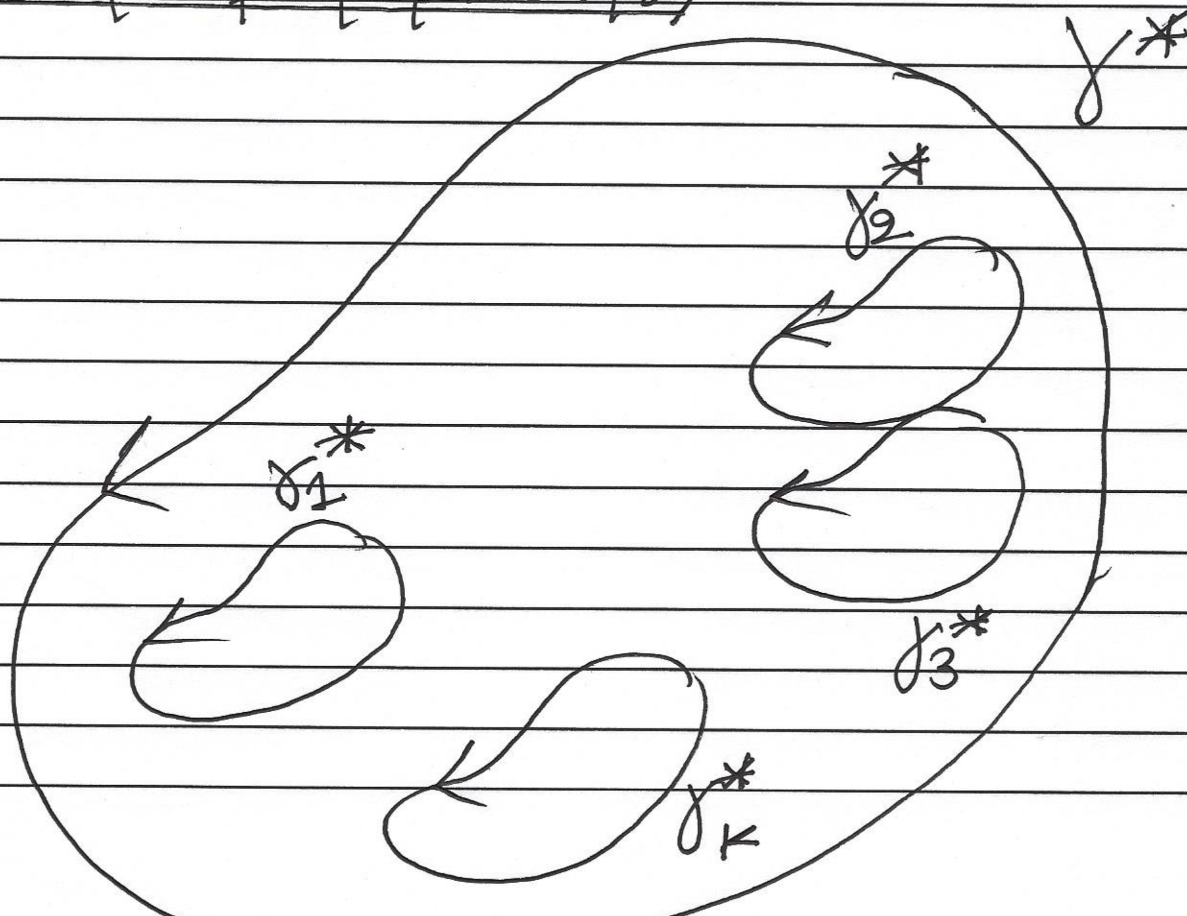
Η $f(z)=1/z$ είναι ολόμορφη στο πεδίο που βρίσκεται μεταξύ των γ^*, γ_ρ^* κ' συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_\rho^*$.

Αρχή Παραμόρφωσης $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,dt$$

$$= 2\pi i.$$

Θ.2. (Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης)



Έστω $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ $(k \geq 1)$ θετικά προσανατολισμένες, απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες, ώστε

- $\operatorname{int}\gamma^* \supset \gamma_j^*$, $1 \leq j \leq k$
- $\operatorname{int}\gamma_i^* \cap \operatorname{int}\gamma_j^* = \emptyset$,

$\forall\, i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$.

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι

$\rightarrow$ συνεχής στο $\gamma^* \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \gamma_j^* \right)$

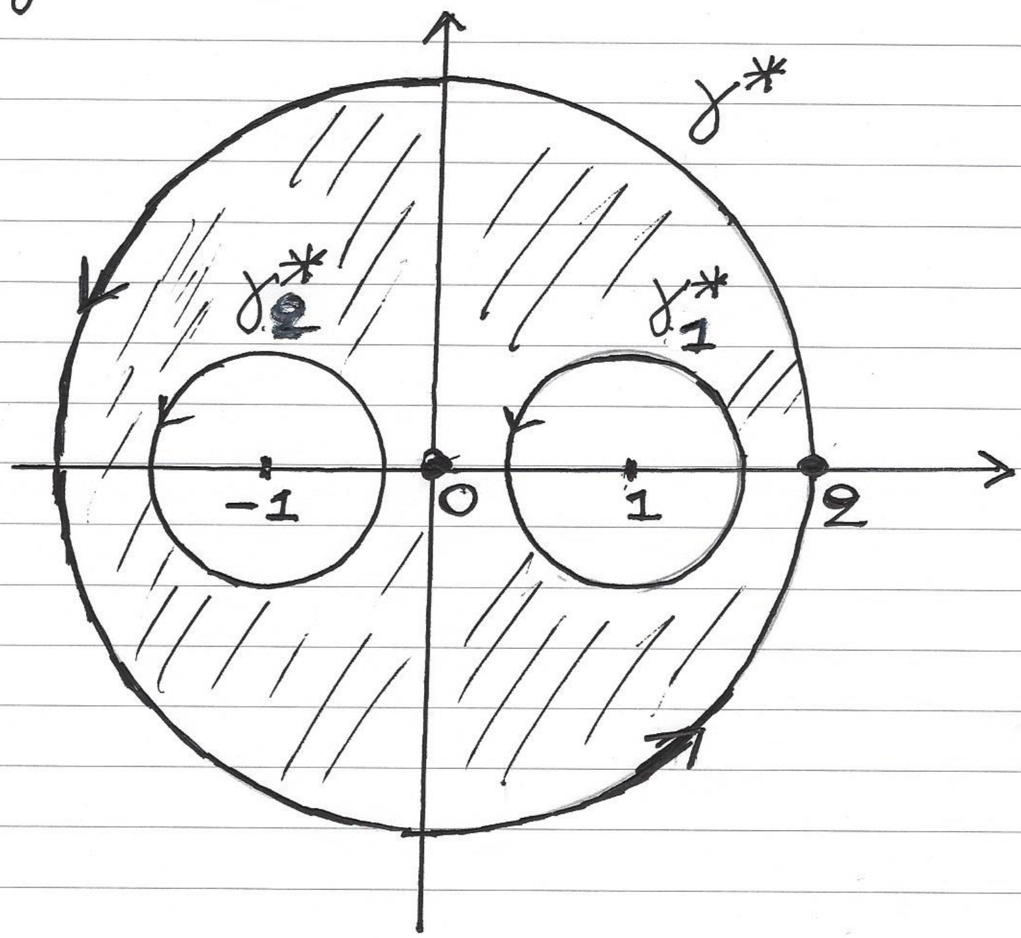
$\rightarrow$ ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_k^*$.

Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Εφαρμογή:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = ;, \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \; t\in[0,2\pi].$$



Θεωρούμε δύο κύκλους γ_1, γ_2 με κέντρα $1, -1$ αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ και συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

<u>Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης</u> $\Rightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Έχουμε $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$,

οπότε

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1},$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1}.$$

Οι συναρτήσεις $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, $z \mapsto \frac{1}{z-1}$

είναι ολόμορφες στα $\operatorname{int}\gamma_1^*$, $\operatorname{int}\gamma_2^*$

αντίστοιχα $\xrightarrow{\Theta\text{-Cauchy}}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} = 0,$$

ενώ $$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \pi i - \pi i = 0.$$

Συμβολισμός:

$\mathcal{C} = \{\gamma \mid \gamma$ απλή, κλειστή, τμ. λεία καμπύλη$\}$

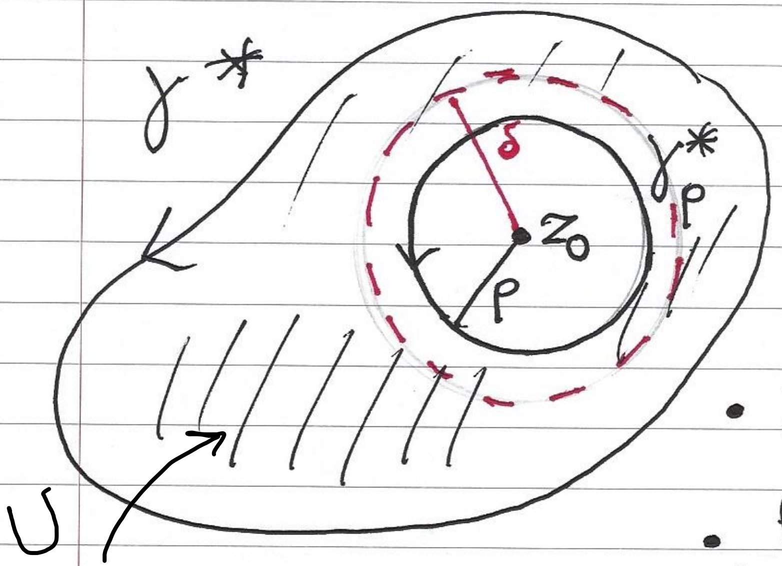
$\mathcal{C}^+ = \{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma$ θετικά προσανατολισμένη$\}$

Θ.3 (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}^+$ με εσωτερικό $\operatorname{int}\gamma^* = U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ κ' f συνεχής στο γ^*. Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0).$$

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή f συνεχής στο $z_0 \in U$, $\exists\, \delta > 0 \mid$

- $D(z_0, \delta) \subset U$
- $\forall z \in D(z_0, \delta)$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$ (3)

Επιλέγουμε $\rho \in (0,\delta)$ ώστε

$\gamma_\rho^* \subset U$, όπου $\gamma_\rho^* = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ είναι

ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_\rho^* \xrightarrow[\text{Παραμόρφ.}]{\text{Αρχή}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ f(z_0)\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ 2\pi i f(z_0)$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (4)$$

$$\forall z \in \gamma_\rho^*,\ |z-z_0| = \rho < \delta \overset{(3)}{\Longrightarrow} |f(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

$$\overset{ML-\text{ανισ.}}{\Longrightarrow} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| \leq 2\pi\rho \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

$$= \varepsilon$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0). \quad \boxtimes$$

<u>Χαρακτηριστικές ασκήσεις</u>

(1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\, dz = ?$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε κύκλους $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^+$ κέντρων $1, -1$ αντίστοιχα με

$\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset$.

(βλ. σχήμα σελ. 7).

Η συνάρτηση $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^z}{z^2-1}$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$$

$$\xrightarrow[\text{Αρχή Παραμ.}]{\text{Γενικευμ.}} \quad \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Έχουμε

• $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z+1}}{z-1}dz$$

$$\underset{\text{Τ. Cauchy}}{\overset{\text{Ολοκλ.}}{=}} \quad 2\pi i \left. \frac{e^z}{z+1} \right|_{z=1} = \pi i e.$$

Σημ. ότι $-1 \notin \operatorname{int}\gamma_1^*$, οπότε

η $z \mapsto \frac{e^z}{z+1}$ είναι ολόμορφη

στο $\operatorname{int}\gamma_1^*$.

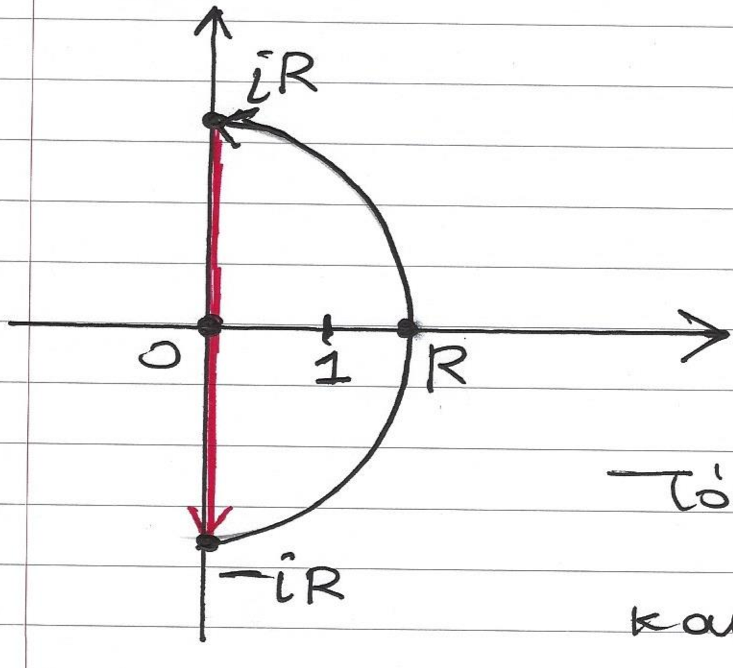
Επιπλέον, $1 \in \operatorname{int}\gamma_1^*$.

- $$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+1}\,dz \overset{\text{Θ.Τ.}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-1}\right|_{z=-1} = -\pi i/e.$$

Σημ. ότι $1 \notin \operatorname{int}\gamma_2^*$, οπότε η $z \mapsto \frac{e^z}{z-1}$ είναι ολόμορφη στο $\operatorname{int}\gamma_2^*$. Επιπλέον, $-1 \in \operatorname{int}\gamma_2^*$.

---

(2) $$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = ?, \quad \gamma_R(t) = Re^{it} \ (R>1), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$



Λύση

Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$ και $1 \in \operatorname{int}\Gamma_R^*$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \dfrac{1}{z+1}$ είναι ολόμορφη στο $\operatorname{int}\Gamma_R^* \xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Ο.Τ.}}$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1} = \pi i$$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{[iR,-iR]} \frac{dz}{z^2-1}$$

$$\Longrightarrow \pi i = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} - \int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1}.$$

Αλλά, $$\int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{-R}^{R} \frac{d(it)}{(it)^2-1} = -i\int_{-R}^{R}\frac{dt}{t^2+1} = -2i\operatorname{Arctan} R$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - 2i\,\mathrm{Arctan}\,R.$$

---

(3) (α) Να δείξετε ότι

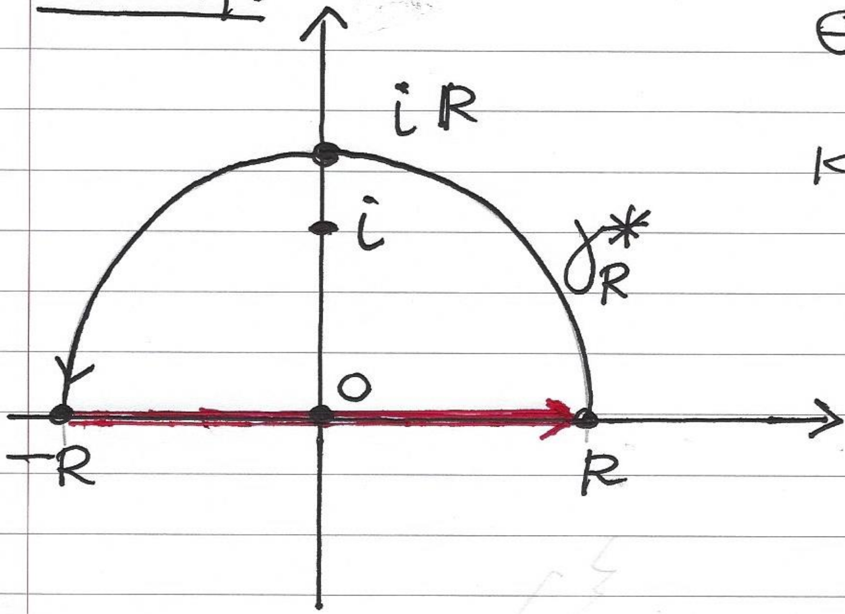
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt.$$

Λύση: Έστω $R>1$.



Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$ και $i \in \mathrm{int}\,\Gamma_R$

$$\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{O.T.}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \pi/e.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt \quad (5)$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$ με $z = x+iy$, έχουμε

$$y \geq 0 \Rightarrow iz = -y + ix$$

$$\Rightarrow |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|1+z^2|}$$

και $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$

$$\xrightarrow[(R>1)]{} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

ML-ανισ. $\Longrightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \cancel{2}\pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$

Παίρνοντας το όριο καθώς $R \to +\infty$ στην (5) κι' επειδή $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \pi/e$,

παίρνουμε

$$\pi/e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \pi/e.$$

(4) $\int_\gamma \bar{z} \cos z \, dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

<u>Λύση</u>: $\forall z \in \gamma^*$, $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z} \cos z \, dz = \int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz \overset{\text{ο.τ.-Cauchy}}{=\!=} 2\pi i \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi i$$

(5) Έστω $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ και $f\in\mathcal{H}(U)$, όπου $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό με $\gamma^*\subset U$. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\,\overline{f(0)}.$$

<u>Λύση:</u>

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\,\overline{f(e^{it})}\,ie^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{it})}\,dt = i\,\overline{\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt}.$$

Αλλά,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{it}}\,ie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz \overset{\text{Θ.Τ. Cauchy}}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{i}\,2\pi i\,f(0) = 2\pi f(0)$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\,\overline{f(0)}.$$

(6) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με

$$D[0,2] = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \} \subseteq U$$

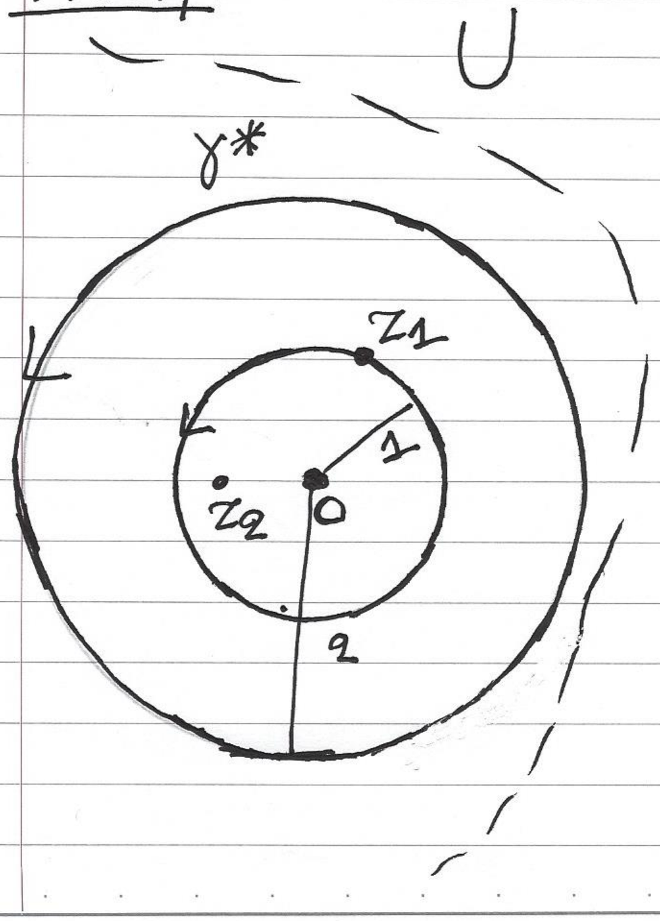
και $f \in \mathcal{H}(U)$, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 2.$$

Να δείξετε ότι $\forall\, z_1, z_2 \in D[0,1]$,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2 |z_1 - z_2|.$$

Λύση:



Έστω $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]_{\mathbb{R}}$,

$z_1, z_2 \in D[0,1]$.

Τότε, $z_1, z_2 \in \operatorname{int} \gamma^*$.

$\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{ο.τ.}}$

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_2} dz$$

$$\Longrightarrow f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\frac{\cancel{z}-z_2-\cancel{z}+z_1}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz$$

$$=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz .$$

Αλλά, $\forall z\in\gamma^*$, $|z|=2 \overset{(\text{υπόθεση})}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow |f(z)|\leq 1$ και

$|z-z_1|\geq |z|-|z_1| = 2-|z_1|\geq 1,$

$|z-z_2|\geq \quad - \; - \; - \; - \quad \geq 1$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right| \leq \frac{1}{1\cdot 1}=1$$

$$\overset{(\text{ML-ανισ.})}{\Longrightarrow} \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\right| \leq 4\pi$$

<u>κλπ</u>