

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

I. Ολοκλήρωση της μορφής

$$\int_a^b \varphi(t) dt, \quad \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής}$$

Ορισμός I.1. Έστω $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$,

$a < b$) ισ' $u = \operatorname{Re} \varphi$, $v = \operatorname{Im} \varphi$. Εάν u, v συνεχείς, ορίζουμε

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt. \quad (+)$$

Π.κ. $\varphi(t) = t^2 + it^3, \quad t \in [0, 1]$,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + i \int_0^1 t^3 dt$$

$$= \frac{1}{3} + i/4. \quad (*) \quad \operatorname{Re} \left[\int_a^b \varphi(t) dt \right] = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt, \quad \operatorname{Im} \left(\int_a^b \varphi \right) = \int_a^b \operatorname{Im} \varphi$$

Πρόταση I.2. Έστω $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

διαφορίσιμη με F' συνεχής. Τότε,

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) =: F(t) \Big|_a^b.$$

Απόδειξη: Αν $F_1 = \operatorname{Re} F$, $F_2 = \operatorname{Im} F$, τότε

$$\int_a^b F'(t) dt = \int_a^b F_1'(t) dt + i \int_a^b F_2'(t) dt$$

$$= [F_1(b) - F_1(a)] + i [F_2(b) - F_2(a)] \text{ κλπ.}$$

☒

$$\underline{\text{Π.χ.}} \int_0^\pi e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{i} (e^{i\pi} - 1) = -\frac{2}{i} = 2i.$$

Βασικές ιδιότητες:

(i) (Γραμμικότητα). Εάν $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_a^b [\lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)] dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt$$

(ii) Εάν $a < \gamma < b$, τότε

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^\gamma \varphi(t) dt + \int_\gamma^b \varphi(t) dt.$$

(iii) $\int_a^b \overline{\varphi(t)} dt = \overline{\int_a^b \varphi(t) dt}.$

Επιπλέον, έχουμε την παρακάτω

Πρόταση 1.3. Εάν $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής,

τότε $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$

Απόδειξη (μη τετριμμένη!)

$$\text{Θέσω } z = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

• Εάν $z=0$, προφανώς ισχύει η απόδειξη.

• Εάν $z \neq 0$. Τότε, $\exists \theta \in \mathbb{R}$
 $z = |z| e^{i\theta}.$

$$\text{Τότε, } |z| = e^{-i\theta} \cdot z = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t) dt$$

$|z| \in \mathbb{R}$
 \Rightarrow

$$|z| = \operatorname{Re} \left[\int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t) dt \right]$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \varphi(t)] dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta} \varphi(t)| dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)| dt. \quad \square$$

II. Μυαδικό ολοκλήρωμα

Ορισμός II-1. Έστω $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μία καμπύλη κ' $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής.

Το μυαδικό ολοκλήρωμα της f πάνω στην γ είναι το

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Παράδειγματα:

(i) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ κ'

$\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i = 2\pi i \end{aligned}$$

(Καλό είναι να το θυμάστε κ' σαν άσκηση!!)

(ii) Έστω γ_R ο κύκλος του παραδ. (i) $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Τότε, } \int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Πράγματι για $n = -1$, βλ. παραδ. (i).

Για $n \neq -1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it} dt \\ &= R^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} [e^{2(n+1)\pi i} - 1] = \frac{R^{n+1}}{n+1} (1-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Όρισμός II.2. Έστω γ κυκλική λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ($n \geq 1$), όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες

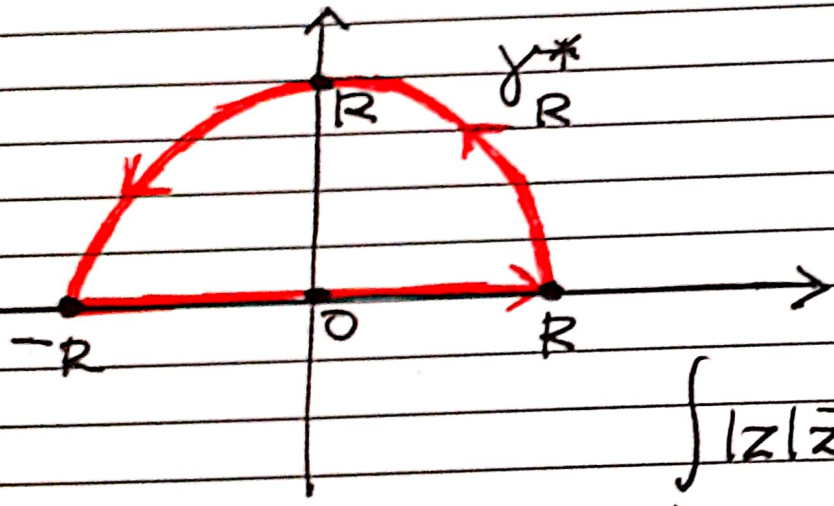
καμπύλες. Εάν $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma_R} |z| \bar{z} dz$, όπου

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R], \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi] \quad (R > 0).$$

Λύση: Η Γ_R είναι τμηματικά λεία.



Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\gamma_R} |z| \bar{z} dz + \int_{-R}^R |z| z dz =$$

$$= \int_0^\pi |Re^{it}| \overline{Re^{it}} i Re^{it} dt + \int_{-R}^R |t| t dt$$

$$= \int_0^\pi i R^3 dt = \pi i R^3.$$

(Σημ. η $t \mapsto |t|t$ είναι περιττή!)

Πρόταση II.4. Έστω γ κτηματικά

λεία καμπύλη, $f, g: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχείς
 κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\int_{\gamma} [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \\ = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Απόδειξη: Εάν $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ λεία, το

ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\int_a^b [\lambda f(\gamma(t)) + \mu g(\gamma(t))] \gamma'(t) dt = \\ = \lambda \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \mu \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Εάν γενικότερα, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ($n \geq 1$)

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες,

τότε το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\lambda \int_{\gamma_k} f(z) dz + \mu \int_{\gamma_k} g(z) dz \right]$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz + \mu \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} g(z) dz$$

$$= \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz. \quad \square$$

Πρόταση II.5. Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ δύο

διαδοχικές τμηματικά λείες καμπύλες

γ'

$$f: \gamma \cup \tilde{\gamma} \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής.}$$

Τότε,

$$\int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Απόδειξη: Έστω

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \dots + \tilde{\gamma}_m,$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες,

$$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m \quad \subset \quad \mathcal{C}((n, m), \mathbb{C}).$$

Επειδή $\gamma, \tilde{\gamma}$ διαδοχικές, το πέρας

της γ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}$.

Ταντόχρονα όμως, το πέρας της γ είναι το πέρας της γ_n ή η αρχή της

$\tilde{\gamma}$ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}_1$.

Άρα, οι $\gamma_n, \tilde{\gamma}_1$ είναι διαδοχικές, οπότε ή

$$\text{οι } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$$

είναι διαδοχικές ή

$$\gamma + \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^n \gamma_k + \sum_{k=1}^m \tilde{\gamma}_k$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma + \tilde{\gamma}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z) dz$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz. \quad \square$$

Πρόταση II.6. Έστω γ κυρτά και λ διά κ'

$f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε, $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα: Εάν γ_1, γ_2 διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1 + \gamma_2) = (-\gamma_2) + (-\gamma_1).$$

Γενικότερα, αν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ($n \geq 1$)

διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) = (-\gamma_n) + \dots + (-\gamma_1).$$

Απόδειξη: Έστω $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε,

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

• $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, έχουμε $a+b-t \in [\frac{a+b}{2}, b]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -(\gamma_1 + \gamma_2)(t) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(a+b-t) = \\ &= \gamma_2(2(a+b-t)-b) = \gamma_2(2a+b-2t) \\ &= \gamma_2((a+b)-(2t-a)) \\ &= (-\gamma_2)(2t-a). \end{aligned}$$

• Όμοια, $\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,

$$-(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = (-\gamma_1)(2t - a).$$

Άρα, $-(\gamma_1 + \gamma_2) = (-\gamma_1) + (-\gamma_2)$.

Η γενίκευση προκύπτει επαγωγικά. \square

Απόδειξη Πρότ. II.6.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
λεία. Επέχεται εύκολα ότι γ

$(-\gamma)$ είναι επίσης λεία & $'$
 $(-\gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t),$
 $\forall t \in [a, b].$

Άρα,
$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \gamma'(a+b-t) dt$$

$s = a+b-t$
$$\int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ($n \geq 1$)

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες.

Τότε,
$$-\gamma = (-\gamma_n) + \dots + (-\gamma_1) \quad (\text{π. 11.4α})$$

$$\Rightarrow \int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{-\gamma_n} f(z) dz + \dots + \int_{-\gamma_1} f(z) dz$$

$$= - \int_{\gamma_n} f(z) dz - \dots - \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

$$= - \left(\int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f \right) = - \int_{\gamma} f. \quad \square$$

(M-L ανισότητα!)

Πρόταση II. 7. Έστω γ τελεματικά λεία

καμπύλη γ $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής.

Έστω $M > 0$ $\forall z \in \gamma^*$ $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \gamma^*$.

Τότε, $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \|\gamma\|$, όπου

$\|\gamma\|$ το μήκος της γ .

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι γ λεία: $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Τότε,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right|$$

$$\stackrel{\text{(Πρόταση I.3)}}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$$

$$\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot \|\gamma\|.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ($n \geq 1$), όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές σειρές καμπύλες.

$$\begin{aligned} \text{Τότε, } \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq M \sum_{k=1}^n \|\gamma_k\| \\ &= M \cdot \|\gamma\|. \end{aligned}$$



Σημαντικό σχόλιο!! Δεν ισχύει

γενικά ότι $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz.$

π.χ. $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi],$

$$f(z) = 1/z, \quad z \in \gamma^*$$

Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt$$

$$= 2\pi i$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = 2\pi,$$

ενώ

$$\int_{\gamma} |f(z)| dz = \int_{\gamma} \frac{1}{|z|} dz =$$

$$= \int_{\gamma} 1 dz = \int_0^{2\pi} i e^{it} dt = e^{it} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

Λεα, $\int_{\gamma} |f(z)| dz < \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| !!$

Παραδείγματα:

(i) $\left| \int_{\gamma} e^{\bar{z} \operatorname{Im} z} dz \right| \leq 2\pi\sqrt{e},$ όπου

$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

Περίγεια: $\forall z = x + iy \in \gamma^*,$

$$\bar{z} \operatorname{Im} z = (x - iy)y = xy - iy^2$$

$$\Rightarrow \left| e^{\bar{z} \operatorname{Im} z} \right| = e^{\operatorname{Re}(\bar{z} \operatorname{Im} z)} = e^{xy} \leq$$

$$\leq e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \stackrel{1/2}{=} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \quad 15$$

[Σημ. $\forall z = x+iy \in \gamma^*$, είναι $|z|=1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2+y^2=1.$]

Επομένως,

$$(ML\text{-ανώτατο}) \Rightarrow \left| \int_{\gamma} e^{\bar{z} \ln z} dz \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{e} \|\gamma\| = 2\pi\sqrt{e}.$$

(ii) $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{4+3z} \right| \leq 2\pi$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Πράγματι: $\forall z \in \gamma^*$, $|4+3z| \geq 4-3|z|=1$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{4+3z} \right| \leq 1 \quad (ML\text{-ανώ.})$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma} \frac{1}{4+3z} dz \right| \leq 1 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

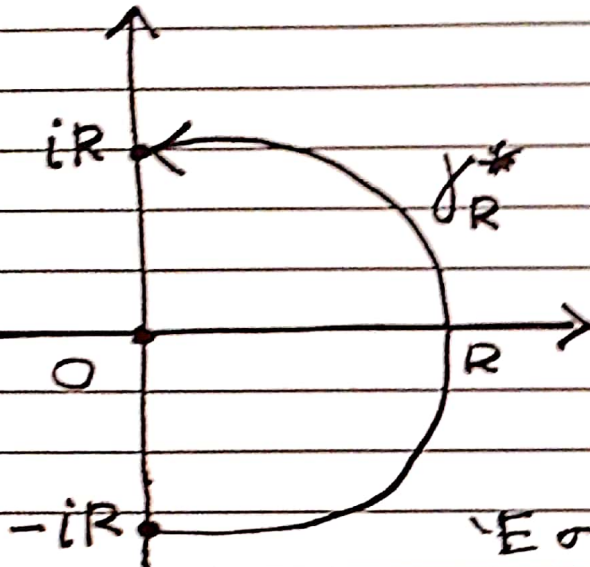
(iii) Να δ-ο. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| = 0$,

όπου $\gamma_R(t) = R e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ($R > 0$).

Πράγματι: Κατ' αρχήν παρατηρούμε

ότι η $z \mapsto \text{Log} z$ είναι συνεχής

πάνω στο γ_R^* , διότι το γ_R^* δεν τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα $(-\infty, 0]$.



Άρα, ορίζεται το ολοκλ.

$$\int_{\gamma_R} \frac{\text{Log} z}{z^2} dz.$$

Έστω $R > 1$.

$\forall z \in \gamma_R^*$, έχουμε $\text{Arg} z \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Rightarrow |\text{Log} z| = |\ln|z| + i \text{Arg} z|$$

$$\leq \ln R + |\text{Arg} z|$$

$$\leq \ln R + \pi/2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\text{Log} z}{z^2} \right| \leq \frac{\ln R + \pi/2}{R^2}$$

(ML-απόσ.)

$$\Rightarrow \forall R > 1, \left| \int_{\gamma_R} \frac{\text{Log} z}{z^2} dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{\ln R + \pi/2}{R^2}$$

$$= \pi \cdot \frac{\ln R + \pi/2}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Παράγουσα - Ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου

Ορισμός II.8. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ'

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Μια ολόμορφη συνάρτηση $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται παράγουσα της f αν
 $F'(z) = f(z), \forall z \in U.$

Π.χ. • Η e^{z^2} είναι παράγουσα της

$2ze^{z^2}$ στο \mathbb{C} .

• Η $-1/z$ είναι παράγουσα της $1/z^2$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• Η $\text{Log} z$ είναι παράγουσα της $1/z$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Πρόταση II.9: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό, συνεκτικό), $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ κ' F, G παράγουσες της f . Τότε,

$$\exists c \in \mathbb{C} \mid F(z) = G(z) + c, \forall z \in U.$$

Απόδειξη: $(F - G)' = 0$ στο $U = \text{πεδίο}$

$\Rightarrow F - G = \text{σταθερή στο } U. \quad \square$

Πρόταση II.10: Έστω F παράγουσα της

f στο ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ & $z_1, z_2 \in U$. Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

για οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subset U$, που έχει αρχή το

z_1 & πέρας το z_2 .

Απόδειξη:

Υποθέτουμε αρχικά
ότι $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

λεία με
 $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$.

Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))] dt =$$

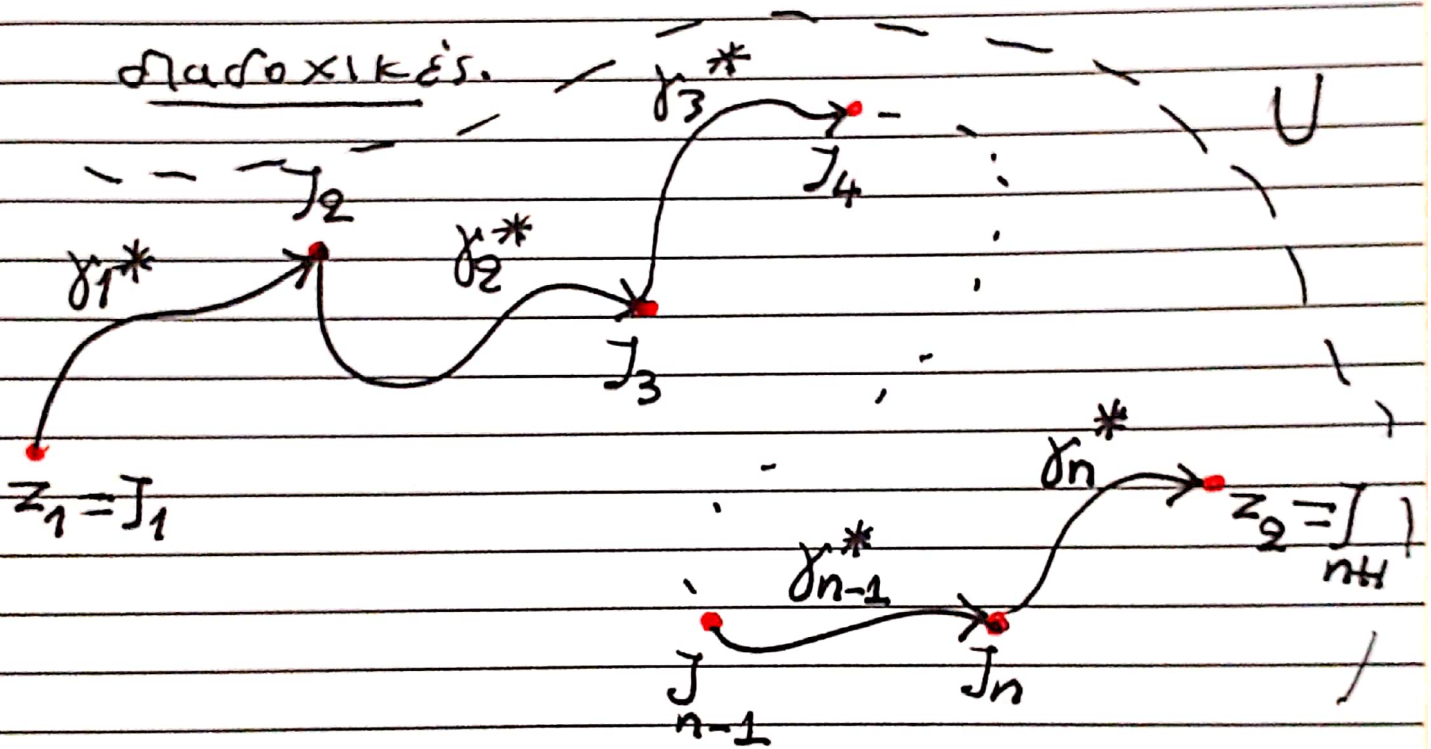
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Ας υποθέσουμε γενικά ότι γ τμηματικά
 λεία καμπύλη με αρχή το z_1 και
 πέρας το z_2 , ώστε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \quad (n \geq 2),$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ λείες καμπύλες

διαδοχικές.



$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, θέτουμε

$$J_k = \eta \text{ αρχή της } \gamma_k,$$

$$J_{k+1} = \text{το πέρας της } \gamma_k.$$

$$\text{Τότε, } J_1 = z_1, \quad J_{n+1} = z_2.$$

Εξούτως

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f + \int_{\gamma_n} f = \\
 &= [F(\overline{J_2}) - F(\overline{J_1})] + [F(\overline{J_3}) - F(\overline{J_2})] + \\
 &+ [F(\overline{J_4}) - F(\overline{J_3})] + \dots + [F(\overline{J_n}) - F(\overline{J_{n-1}})] + \\
 &+ [F(\overline{J_{n+1}}) - F(\overline{J_n})] = \\
 &= F(\overline{J_{n+1}}) - F(\overline{J_1}) = F(z_2) - F(z_1). \quad \square
 \end{aligned}$$

Πρόταση II.11: Έστω γ κλειστή τηλεκα-
υκά αεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, όπου

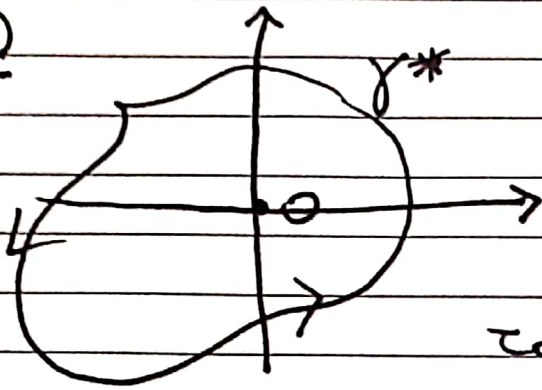
$U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Εάν $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ με
παράγουσα, τότε $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Απόδειξη: Έστω F παράγουσα της f

στο U . Εάν γ κλειστή τη. αεία με

$\gamma^* \subset U$, τότε η αρχή z_1 και το πέρας
 z_2 της γ ταυτίζονται

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{(πρόζ. II.10)} \quad \int_{\gamma} f(z) dz &= F(z_2) - F(z_1) \\
 &= 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Παραδείγματα:(i)Εάν γ τμημ. θείακλειστή καμπύλη
με $0 \in \text{int} \gamma^*$,

$$\text{τότε } \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Πράγματι: $\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \text{ανοικτό}$
 κ' η $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγωγο στο U (π.χ.
 την $-1/z$.)

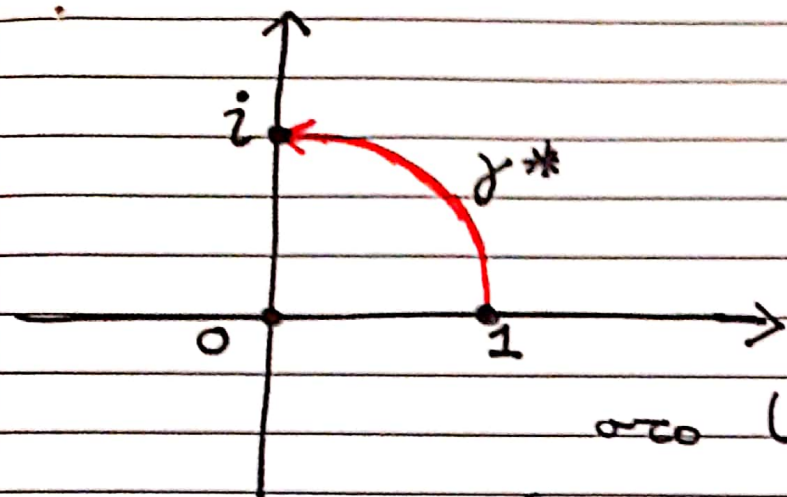
$$\text{(ii)} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Επεται ότι η $1/z$ δεν έχει παράγωγο
 στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (αλλιώς θα έπρεπε

$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$). Φυσικά, έχει παράγωγο
 στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, την $\text{Log } z$.

$$\text{(iii)} \quad \text{Να υπολογιστεί το } \int_{\gamma} \frac{\text{Log}^3 z}{z} dz,$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi/2]$.



$$\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$$H \quad z \mapsto \frac{1}{4} \text{Log}^4 z$$

είναι ολόμορφη
στο U

$$\left(\frac{1}{4} \text{Log}^4 z \right)' = \frac{\text{Log}^3 z}{z}, \quad \forall z \in U$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{\text{Log}^3 z}{z} dz = \frac{1}{4} \left(\text{Log}^4 i - \text{Log}^4 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln|i| + i \text{Arg}(i) \right]^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{i\pi}{2} \right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{64}$$

(iv) Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο
 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

ώστε

$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall z \in D,$$

όπου $M > 0$ σταθερά.

Τότε,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|,$$

$\forall z_1, z_2 \in D$. Πράγματι: Έστω $z_1, z_2 \in D$.

Τότε, $[z_1, z_2] \subset D$

$$\Rightarrow f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz$$

(ML-ανισ.)

κ.α.π.