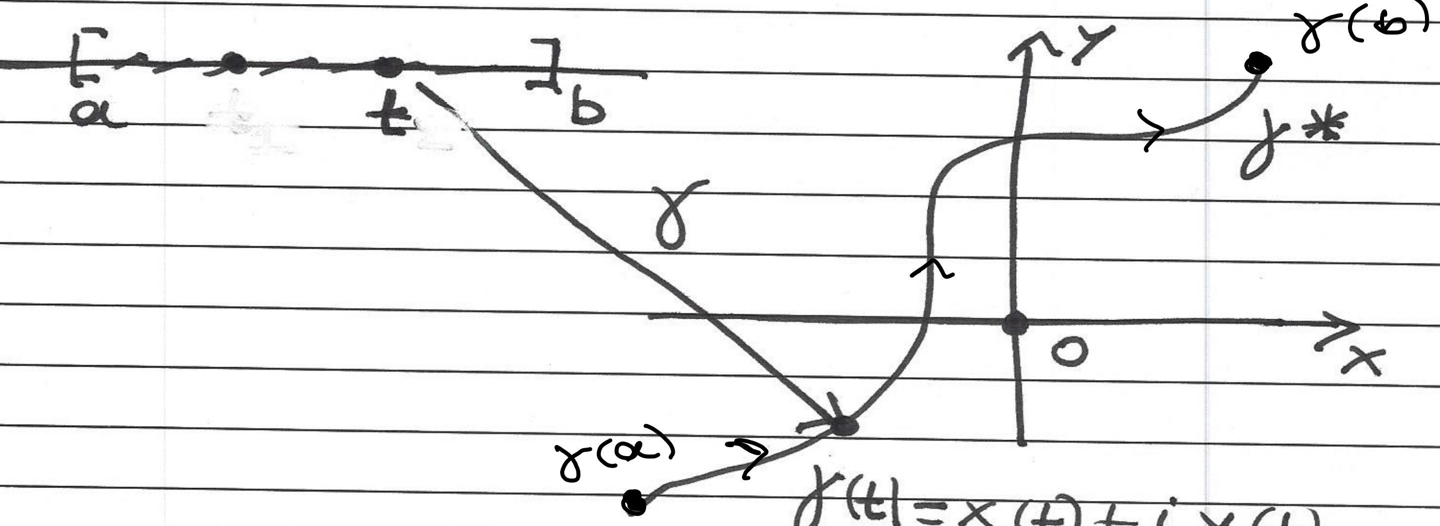
Στοιχεία καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο

Ορισμός 1. Καμπύλη στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



$\forall t \in [a,b]$, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, όπου

$$x(t) = \mathrm{Re}\,\gamma(t), \quad y(t) = \mathrm{Im}\,\gamma(t).$$

Έτσι, ορίζονται δύο συναρτήσεις

$$x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$$

με $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, $\forall t \in [a,b]$.

Το σύνολο $\gamma^* = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ λέγεται ίχνος της γ.

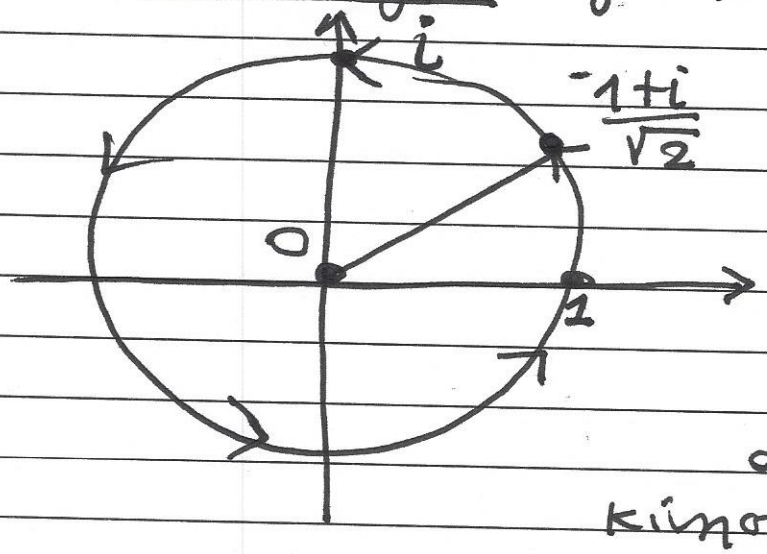
Το $\gamma(a)$ καλείται <u>αρχή</u> κ' το $\gamma(b)$ <u>πέρας</u> της καμπύλης γ.

Στα σημεία του γ^* ορίζεται μια φυσιολογική διάταξη:

"Το σημείο $\gamma(t_1)$ προηγείται του $\gamma(t_2)$ αν $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [a,b]$."

Με αυτόν τον τρόπο καθορίζουμε τη <u>φορά διαγραφής</u> του γ^*.

<u>Παράδειγμα</u>: $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



γ^* = ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0 με φορά διαγραφής <u>θετική</u>, δηλ. αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Πράγματι, $0 < \pi/4 < \pi/2$, οπότε

- το $\gamma(0) \equiv (1,0)$ "προηγείται" του $\gamma(\pi/4) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- το $\gamma(\pi/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ "προηγείται" του

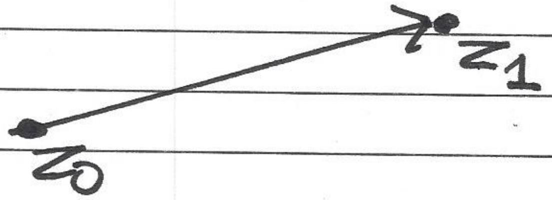
$\gamma(\pi/2) \equiv (0,1)$.

Συχνά "ταυτίζουμε" μια καμπύλη με το ίχνος της. [Παρ' όλ' αυτά οι δύο έννοιες είναι διαφορετικές.]

Παραδείγματα:

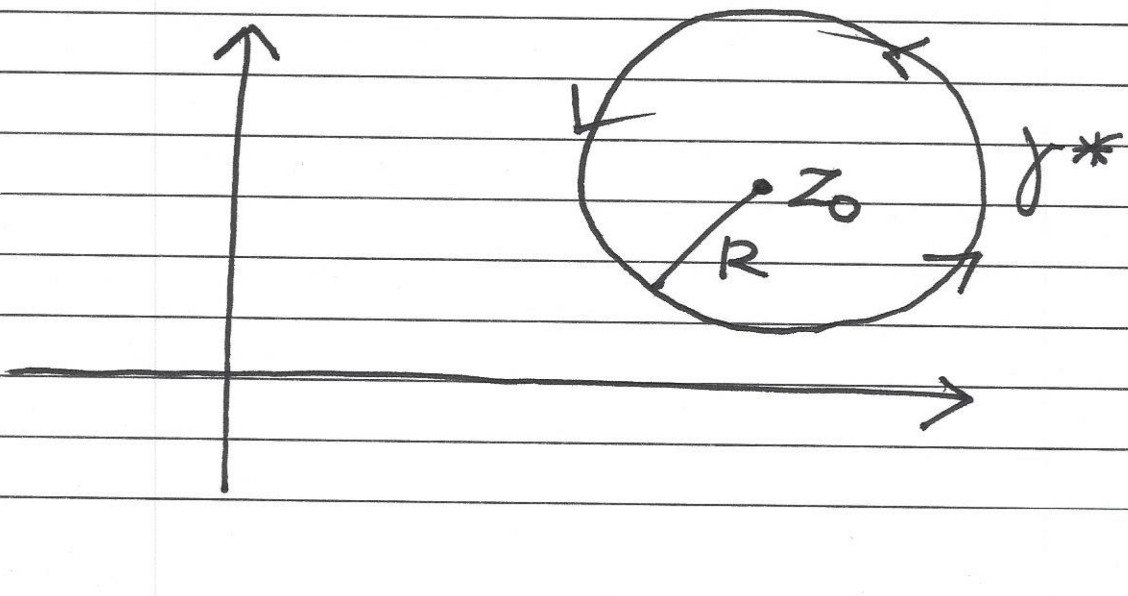
(i) Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ κ' $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)z_0 + t z_1$, $t \in [0,1]$.

$\gamma^* = [z_0, z_1]$ = το προσανατολισμένο ευθ. τμήμα με αρχή το z_0 κ' πέρας το z_1.



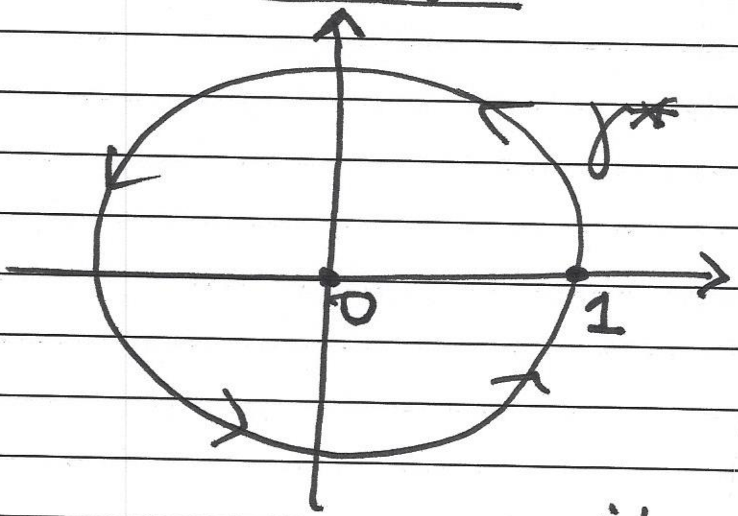
(ii) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ κ' $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$.

γ^* = ο κύκλος με κέντρο z_0 κ' ακτίνα R, με θετική φορά διαγραφής



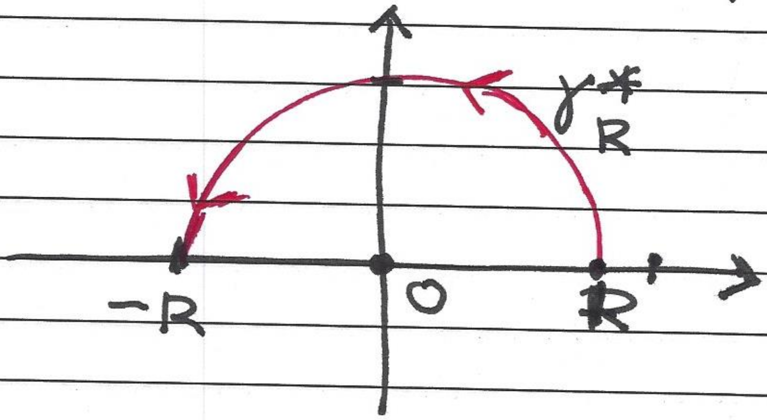
(iii) $\gamma(t) = e^{it}, \; t \in [0, 4\pi]$.

γ^* = ο μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται <u>2 φορές</u> κατά την θετική φορά



(iv) $\gamma_R(t) = Re^{it}, \; t \in [0, \pi] \; (R > 0)$.

γ_R^* = το άνω ημικύκλιο κέντρου O κ' ακτίνας R με θετική φορά διαγραφής.



<u>Ορισμός 2.</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη.

Η γ λέγεται

- <u>κλειστή</u>, αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- <u>απλή</u>, αν η $\gamma|_{[a,b)}$ είναι 1-1

(δηλ. το γ^* "δεν τέμνει τον εαυτό του")

<u>Παραδείγματα:</u>

(i) $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
$(R > 0,\ z_0 \in \mathbb{C})$.

Η γ είναι απλή, κλειστή.

(ii) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$

Η γ είναι κλειστή, όχι απλή

(iii) $\gamma : [-\pi/2, 2\pi] \to \mathbb{C}$

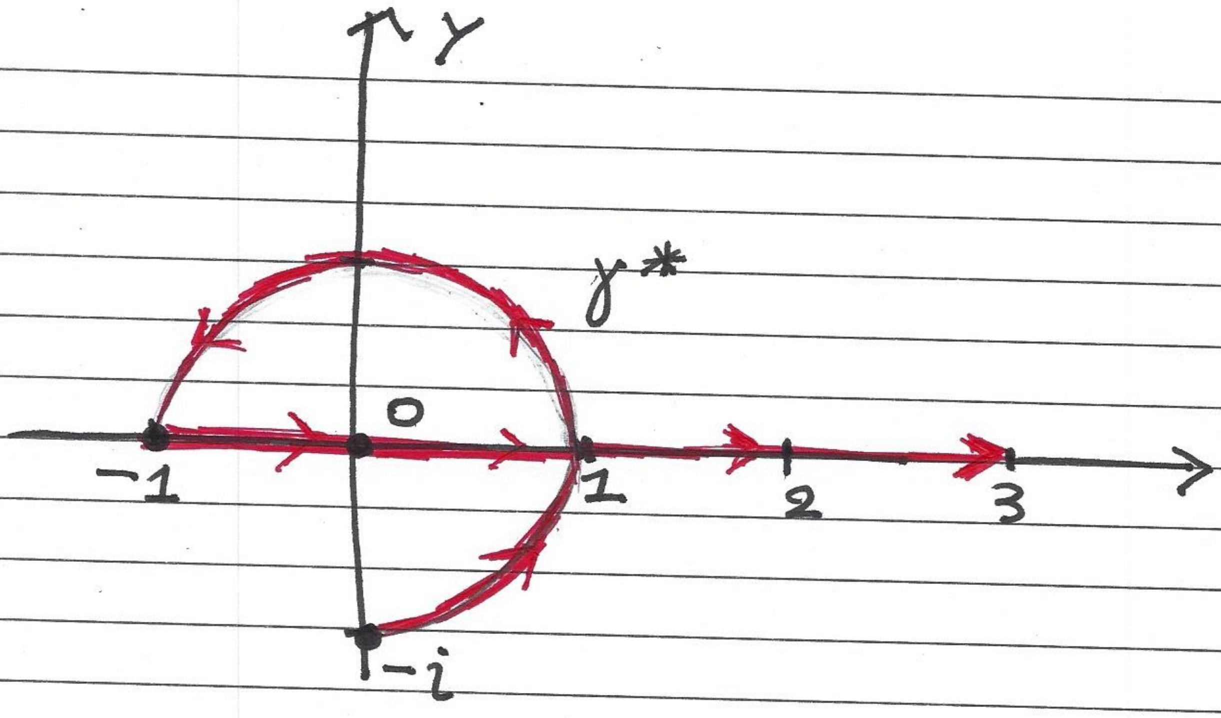
$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & t \in [-\pi/2, \pi] \\ \dfrac{4t}{\pi} - 5, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

$\gamma(-\pi/2) = -i$, $\gamma(0) = \gamma(3\pi/2) = 1$,

$\gamma(2\pi) = 3$

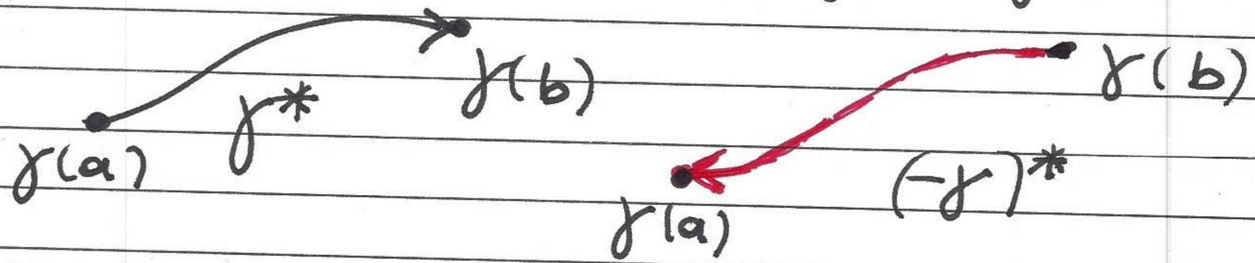
Άρα, γ ούτε κλειστή, ούτε απλή.

(Βλ. σχήμα παρακάτω)



<u>Ορισμός 3.</u> — Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη.

Η <u>αντίθετη</u> <u>της</u> γ, είναι η καμπύλη $(-\gamma) : [a,b] \to \mathbb{C}$ με $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$.

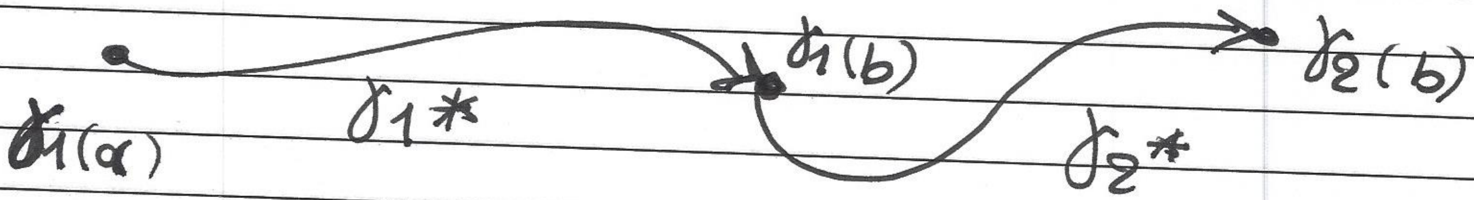


Τα ίχνη των γ, $(-\gamma)$ έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

Ορισμός 4. Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ δύο διαδοχικές καμπύλες, δηλ. $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$.
Άθροισμα των γ_1, γ_2 είναι η καμπύλη $(\gamma_1+\gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{C}$ με

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Ισχύει $(\gamma_1+\gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

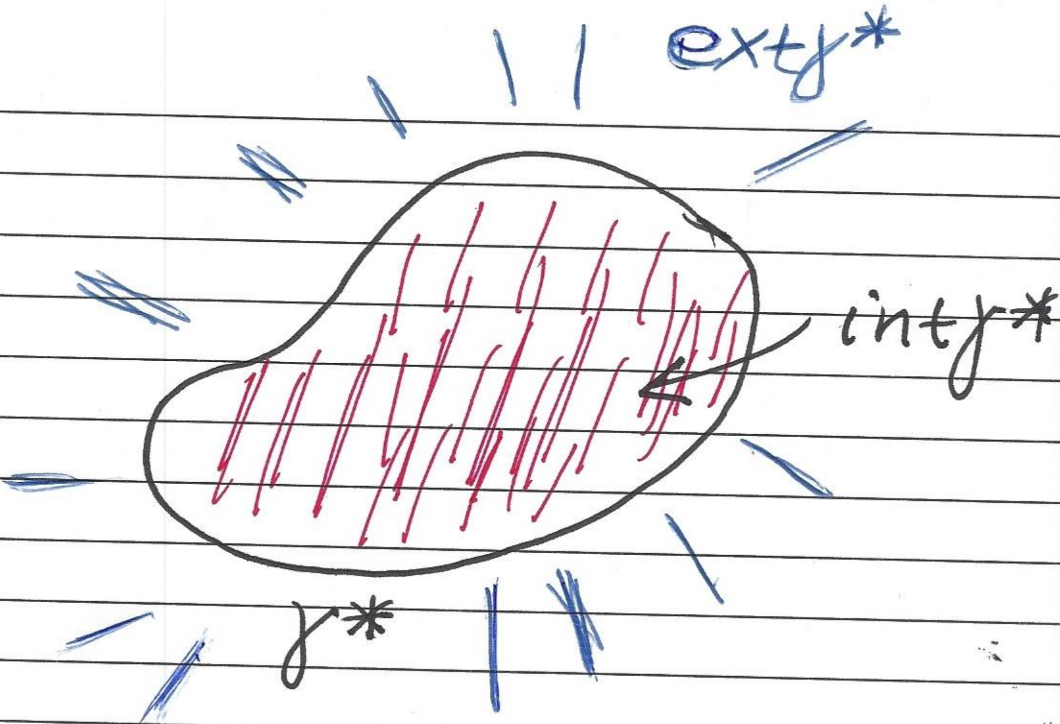


Θεώρημα 5 (Jordan)

Έστω γ απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε, το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ χωρίζεται σε δύο πεδία:

— ένα φραγμένο πεδίο που λέγεται <u>εσωτερικό</u> <u>της γ</u> $(\mathrm{int}\, \gamma^*)$

— ένα μη φραγμένο πεδίο που λέγεται <u>εξωτερικό της γ</u> $(\mathrm{ext}\, \gamma^*)$

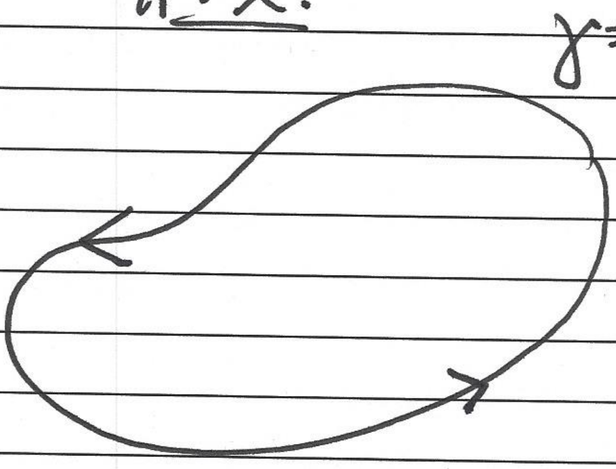


Το παραπάνω θεώρημα του Jordan φαίνεται διαισθητικά προφανές αλλά η απόδειξή του είναι δύσκολη!!

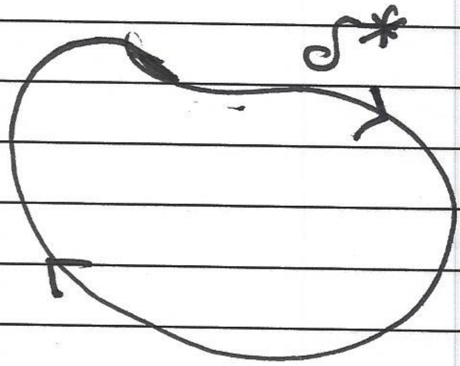
Ορισμός 6. Μια απλή, κλειστή καμπύλη γ λέγεται θετικά προσανατολισμένη αν ένας παρατηρητής που κινείται πάνω στο γ* αφήνει πάντα στα αριστερά του το εσωτερικό της γ.

Μια καμπύλη (απλή, κλειστή) που δεν είναι θετικά προσανατολισμένη λέγεται αρνητικά προσανατολισμένη.

<u>Π.χ.</u>



γ: θετικά προσανατολισμένη



δ: αρνητικά προσανατολισμένη

Προφανώς, η $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ με
$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $R>0$),

είναι θετικά προσανατολισμένη.

<u>Ορισμός 7.</u> Έστω $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$

καμπύλη με $x(t) = \operatorname{Re}\gamma(t)$, $y(t) = \operatorname{Im}\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, δηλ.
$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b].$$
Η γ λέγεται <u>λεία</u> ανν:

(i) οι $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες
(ii) $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in (a,b)$

όπου $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

<u>Σχόλιο</u>: Η συνθήκη (ii) του ορισμού απαιτεί σε κάθε σημείο του γ^* το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι $\neq 0$ κ' άρα να ορίζεται καλώς η εφαπτομένη.

<u>Παραδείγματα</u>:

(i) $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$).

Η γ_R είναι λεία.

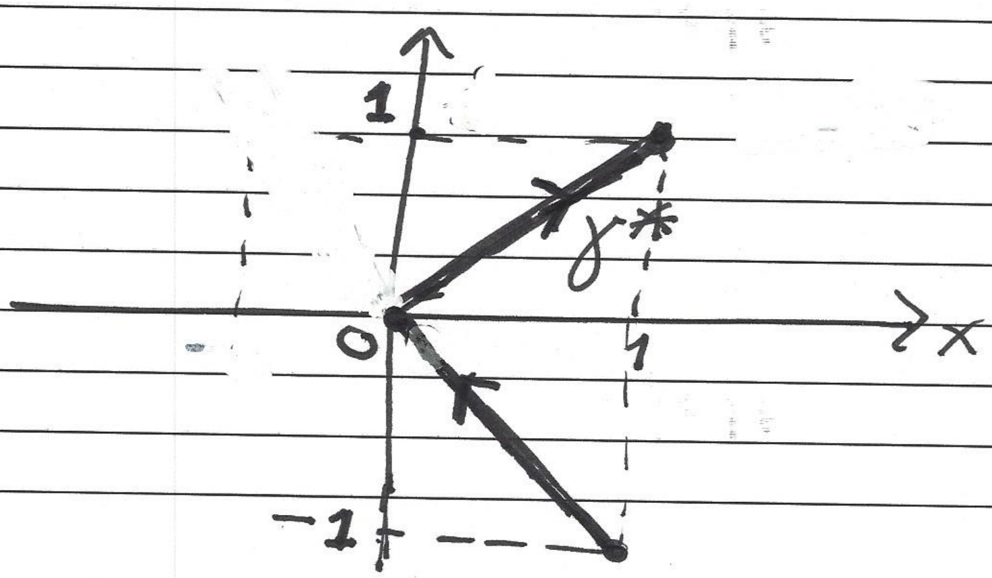
(ii) $$\gamma(t) = \begin{cases} t^2 + t^2 i, & t \in [0,1] \\ t^2(1-i), & t \in [-1,0] \end{cases}$$

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1] \\ -t^2, & t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Οι $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο $[-1,1]$ αλλά

$$\gamma'(0) = x'(0) + i y'(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ η γ <u>δεν</u> είναι λεία.

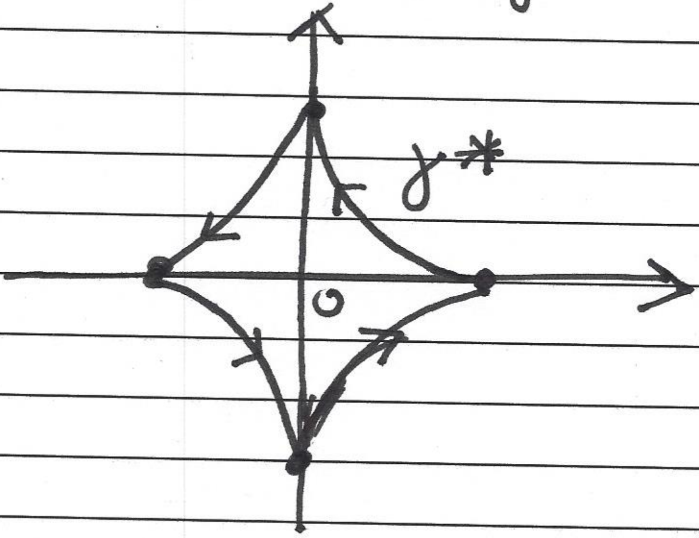


Σημ. ότι στο σημείο O υπάρχει "γωνία"!!

(iii) $\gamma(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$.

$\gamma'(t) = 0,\ \forall\, t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$

$\Longrightarrow$ η γ δεν είναι λεία.



<u>Ορισμός 8.</u> Μια καμπύλη που είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών ονομάζεται <u>τμηματικά λεία</u>.

Οι καμπύλες των παραδειγμάτων (ii), (iii) (βλ. παραπάνω) είναι τμηματικά λείες.

<u>Ορισμός 9.</u> Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. <u>Μήκος της γ</u> (συμβ. $\|\gamma\|$) είναι ο αριθμός

$$\|\gamma\| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
$(z_0 \in \mathbb{C},\ R > 0)$.

$$\|\gamma_R\| = \int_0^{2\pi} |\gamma_R'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |Rie^{it}|dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R.$$

<u>Ορισμός **1α.**</u> Εάν γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες $(n \geq 1)$, τότε το <u>μήκος</u> της γ είναι ο αριθμός $\|\gamma\| = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma_k\|$.