

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Προαπαιτούμενα

Ορισμός 1.1. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}$, $t_0 \in I$.

Η φ λέγεται διαφορίσιμη στο t_0

ανν οι συναρτήσεις $u = \operatorname{Re} \varphi$, $v = \operatorname{Im} \varphi$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0 .

Σ' αυτή την περίπτωση γράβουμε

$$\underline{\varphi'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0).}$$

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις της

$$\text{μορφής } \varphi(t) = u(t) + i v(t), \quad t \in I$$

($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα)

έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν

οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις πάνω

σε διαστήματα, εκτός από το Θ . Rolle

π.χ. $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (2)

$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$ αλλά $\varphi'(t) = ie^{it} \neq 0$
 $\forall t \in (0, 2\pi)$.

Παρατήρηση 1.2. Εάν $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$,
 $t \in I$, διαφορίσιμη στο I με $\varphi'(t) = 0$,
 $\forall t \in I$, τότε $\varphi = \text{σταθερή}$ στο I .

Πράγματι: σύμφωνα την περίπτωση,

$u'(t) = v'(t) = 0$, $t \in I \Rightarrow u, v$ σταθερές
στο I .

Πρόταση 1.3. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό,

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη κ' $\varphi: I \rightarrow U$ διαφορ.
($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό). Τότε,

$\frac{d}{dt} [f(\varphi(t))] = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in I$.

Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Το ευθ. τμήμα με
αρχή το z_0 κ' πέρας το z_1 είναι

$[z_0, z_1] = \left\{ (1-t)z_0 + tz_1 \mid t \in [0, 1] \right\}$

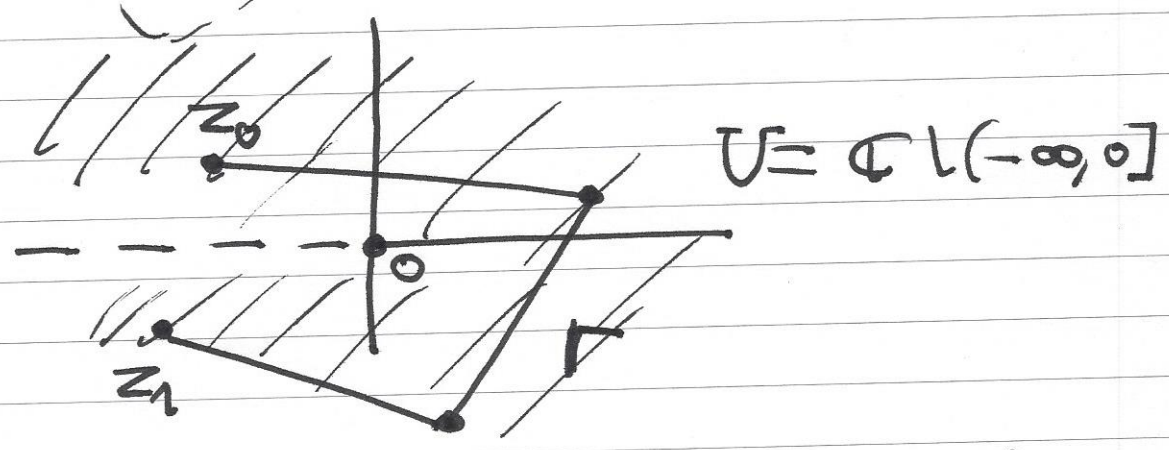
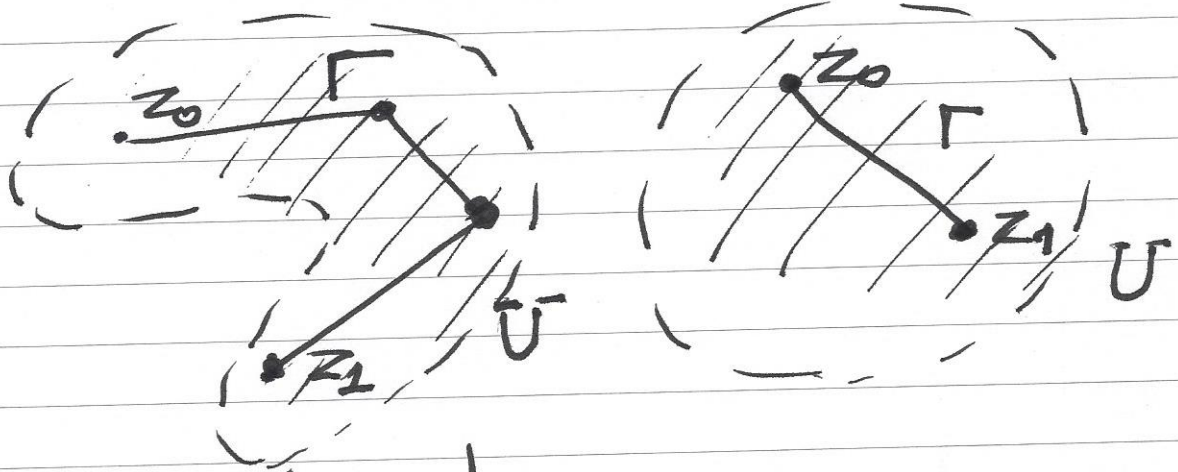
Ορισμός 1.4. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό.

Το U λέγεται συνεκτικό αν $\forall z_0, z_1 \in U$

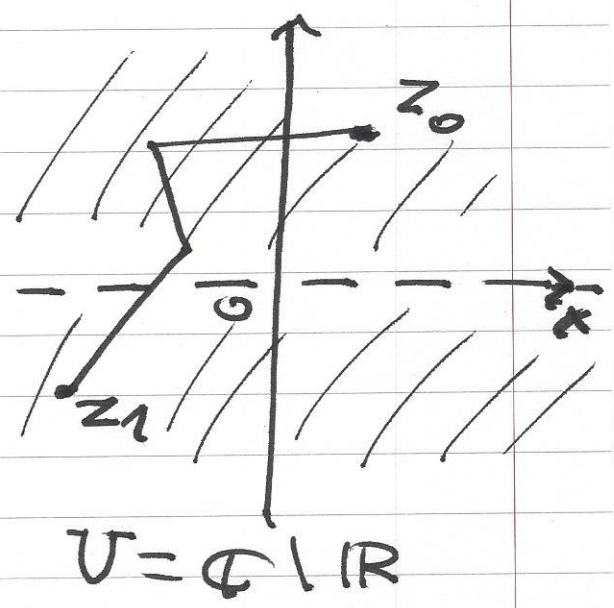
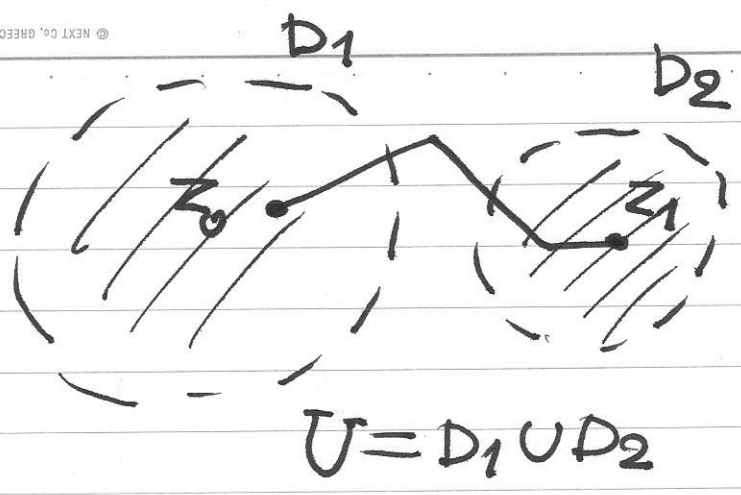
\exists τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ που

συνδέει τα z_0, z_1 .

Π.χ. τα παρακάτω σύνολα είναι
συνεκτικά.



Τα παρακάτω σύνολα δεν είναι
συνεκτικά.



Και στις δύο περιπτώσεις, κάθε τετρασ-
 κείνη γραμμή που συνδέει τα $z_0, z_1 \in U$
 έχει σημεία της εκτός του U .

Σχόλιο: Τα συνεκτικά ^{ανοικτά} υποσύνολα του \mathbb{R}
 είναι τα ανοικτά διαστήματα. Η έννοια
 του συνεκτικού συνόλου στο \mathbb{C}
 επεκτείνει την έννοια του διαστήματος.

Πρόταση 1.5.: Έστω U ανοικτό, συνεκ-
κό $\subseteq \mathbb{C}$ κ' $f \in H(U)$ με $f'(z) = 0, \forall z \in U$.
 Τότε, f σταθερή στο U .

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Εάν $z_0, z_1 \in U$ με $[z_0, z_1] \subset U$,
τότε η f είναι σταθερή στο $[z_0, z_1]$.

[Πράγματι: $\forall t \in (0, 1)$,

$$\frac{d}{dt} [f((1-t)z_0 + tz_1)] =$$

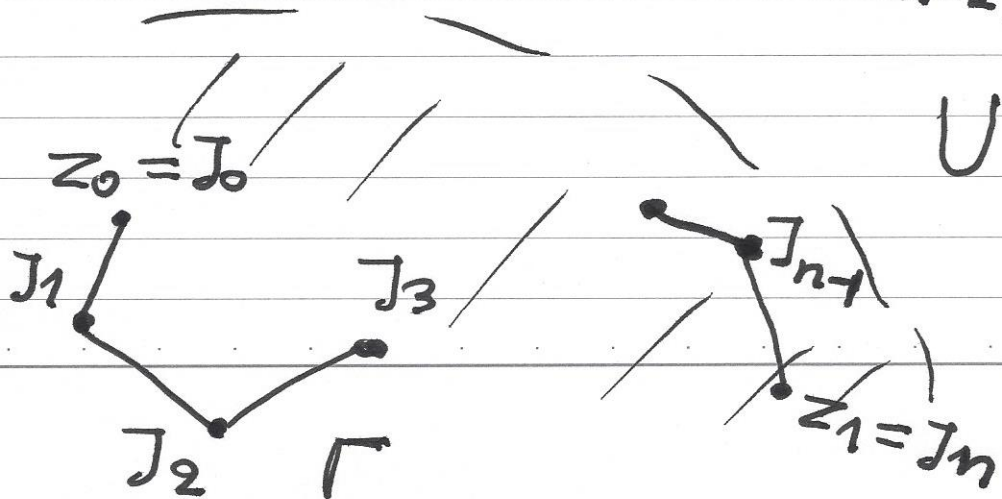
$$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot \frac{d}{dt} [(1-t)z_0 + tz_1]$$

$$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot (z_1 - z_0) = 0, \text{ αφού } f' = 0, \text{ στο } U.]$$

Έστω τώρα $z_0, z_1 \in U$. Εφ'όσον U

συνεκτικό, \exists τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$
με κορυφές

$$J_0 = z_0, J_1, J_2, \dots, J_{n-1}, J_n = z_1 \quad (n \geq 2)$$



6

Λόγω του λοχυρισμού, η f είναι σταθερή
στα διαστήματα

$$[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{n-2}, z_{n-1}], \\ [z_{n-1}, z_1].$$

Άρα,

$$f(z_0) = f(z_1), f(z_1) = f(z_2), \dots,$$

$$f(z_{n-2}) = f(z_{n-1}), f(z_{n-1}) = f(z_1)$$

$$\Rightarrow f(z_0) = f(z_1), \forall z_0, z_1 \in U.$$

Επομένως, f σταθερή. \square

Σχόλιο: Η συνεκτικότητα του U στην
Πρόταση 1.5 δεν μπορεί να παρα-
-λειφθεί γενικά.

Π.χ. $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$,
 $U = D_1 \cup D_2$.

Το U είναι ανοικτό, μη συνεκτικό.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases} \quad \text{Τότε,}$$

$f \in H(U)$, $f' = 0$, στο U κ' f μη σταθερή.

(7)

Ορισμός 1.6. Πεδίο στο \mathbb{C} , είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο $\subseteq \mathbb{C}$.

Πρόταση 1.7: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f \in H(U)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Εάν $\operatorname{Re} f$ ή $\operatorname{Im} f$ σταθερή, τότε f σταθερή.

(ii) Εάν $\bar{f} \in H(U)$, τότε f σταθερή.

(iii) Εάν $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.

Απόδειξη: (i) $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

Ας υποθέσουμε ότι $u = \text{σταθερή}$. Τότε, $u_x = u_y = 0$, στο U . Από συνθήκες (C-R) παίρνουμε $v_x = -u_y = 0$, στο U

$$\Rightarrow f' = u_x + i v_x = 0, \text{ στο } U$$

(Πρότ. 1.5) $\Rightarrow f$ σταθερή. [Όμοια, αν v σταθερή.]

(ii) $\bar{f} = u - i v$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

(C-R) για την f : $u_x = v_y, u_y = -v_x$

(C-R) για την \bar{f} : $u_x = -v_y, u_y = v_x$.

Επεται ότι $u_x = v_x = 0 \Rightarrow f' = 0$, στο U

(Πρότ. 1.5) $\Rightarrow f = \text{σταθερή}$.

(8)

(iii) Έστω $|f| = c = \text{σταθερή} \in [0, +\infty)$.

• αν $c = 0$, τότε $f = 0$, στο U .

• Έστω ότι $c \neq 0$. Τότε, $\forall z \in U$,

$$|f(z)|^2 = c^2 \Rightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = c^2$$

$$\Rightarrow \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}, \forall z \in U \Rightarrow \overline{f} \in H(U)$$

(ii) \Rightarrow f σταθερή. ☒

Άσκηση 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο $\neq \emptyset$
 $f \in H(U)$.

(i) Αν $e^f = \text{σταθερή}$, τότε $f = \text{σταθερή}$.

(ii) Αν $f(z) \cdot f'(z) = 0, \forall z \in U$, τότε
 $f = \text{σταθερή}$.

Απόδειξη: (i) $(e^f)' = 0 \Rightarrow f' \cdot e^f = 0$
στο $U \Rightarrow f' = 0$, στο U
 $\Rightarrow f = \text{σταθερή}$.

(ii) Θέσω $g = f^2$. Τότε, $g' = 2f \cdot f' = 0$

$\Rightarrow g = \text{σταθερή}$ στο U , έστω $g = c \in \mathbb{C}$.

Τότε,
 $|f|^2 = |g| = |c| \Rightarrow |f| = \sqrt{|c|}$

$\Rightarrow |f| = \text{σταθερή} \xrightarrow{\text{(πρόβ. 1.7)}} f = \text{σταθερή}$. ☒

Άσκηση 2: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο \mathbb{C}
 $f, g \in H(U)$ ώστε $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}, \forall z \in U.$

Να δ-ο. $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(z) = c + g(z), \forall z \in U.$

Απόδειξη: Θεώω $h = f - g.$

Τότε, $\forall z \in U, f(z) + \overline{g(z)} = \overline{f(z) + \overline{g(z)}} =$
 $= \overline{f(z)} + \overline{\overline{g(z)}} = \overline{f(z)} + g(z)$

$\Rightarrow h(z) = \overline{h(z)}, \forall z \in U \Rightarrow h, \overline{h} \in H(U)$

Πρότ. 1.7 $\Rightarrow h = c = \text{σταθερή}.$ Αλλά, $\overline{c} = c$
 $\Rightarrow c \in \mathbb{R}. \square$

Άσκηση 3: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο \mathbb{C}

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνάρτηση ώστε
 $f^3 \in H(U), \overline{f}^2 \in H(U).$

Να δ-ο. f σταθερή.

Απόδειξη: $f^6 = (f^3)^2 \in H(U),$

$\overline{f}^6 = (\overline{f}^2)^3 \in H(U) \xrightarrow{\text{Πρότ. 1.7}} f^6 = \text{σταθερή}.$

Τότε, $|f|^6 = |f^6| = \text{σταθερή}$

$\Rightarrow |f| = \text{σταθερή}$

$\Rightarrow |f| = c \geq 0.$

Τότε,

$$|f^3| = c^3, \quad |\overline{f}^2| = |\overline{f}|^2 = |f|^2 = c^2$$

(πρότ. 1.7)

$$\Rightarrow f^3 = c_1 \in \mathbb{C}, \quad \overline{f}^2 = c_2 \in \mathbb{C}^{(+)}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 \cdot f(z), \quad \forall z \in U.$$

• Αν $c_2 = 0$, τότε $f = 0$, σε U .

• Αν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2, \forall z \in U$.

Άρα, $f = \text{σταθερή}$ σε κάθε περίπτωση.

(+) Είναι $\overline{f}^2 \in H(U)$ κ' $|\overline{f}^2| = \text{σταθερή}$

πρότ. 1.7

$$\Rightarrow \overline{f}^2 = \text{σταθερή}$$

$$\Rightarrow f^2 = \text{σταθερή}$$