

①

ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝΥΠΕΝΘΥΜΛΙΣΗ:ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT

Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο"
ανοικτό δίσκο

$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\},$$

όπου $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$.

Τότε, $\exists!$ $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (1)$$

Επιπλέον, $\forall \gamma \in \mathcal{C}_+$ με

$$z_0 \in \text{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R),$$

ισχύει

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Συμβολή:

$\mathcal{C}_+ = \left\{ \begin{array}{l} \text{όλες οι κλειστές, θετικά προσανατολ-} \\ \text{απρές, τμ. λείας καμπύλες} \end{array} \right\}$.

(2)

Σχόλιο 1: Οι συντελεστές a_k , $k \in \mathbb{Z}$

στην (2), δεν εξαρτώνται

— από την επιλογή της καμπύλης γ
 με $z_0 \in \text{int} \gamma^*$, $\gamma^* \subset D(z_0, R)$.

— από την ακτίνα $R \in (0, \infty]$ ώστε

f ομομορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Τα παραπάνω προκύπτουν από την Αρχή Παραμόρφωσης.

Σχόλιο 2: Το Θ -Laurent επεκτείνεται

σε ανοικτούς δακτυλίους:

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$$

• Για $r_1 = 0$, $r_2 < \infty$, έχουμε

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = D(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$$

• Για $0 < r_1 < r_2 = \infty$,

ο $\Delta(z_0, r_1, r_2)$ είναι το εξωτερικό

των ανοικτών δίσκων $D(z_0, r_1)$

• Για $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, $\Delta(z_0, r_1, r_2) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Παραδείγματα:

(i) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

στον κυρτημένο δίσκο
 $0 < |z-1| < 1$,
 γύρω από το σημείο $z_0=1$.

Λύση: $f(z) = \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$.

Θέτουμε $w = z-1$, οπότε για
 $0 < |z-1| < 1$ έχουμε
 $0 < |w| < 1$.

και $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{w+1-2} = -\frac{1}{1-w}$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z-1)^k,$$

$$\alpha_k = \begin{cases} -1, & k \geq 0 \\ 1, & k = -1 \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(4)

(ii) Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\text{Laurent της } f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}, \text{ στους}$$

«δακτυλίους»,

$$0 < |z-1| < 1, \quad |z-1| > 1,$$

γύρω από το $z_0 = 1$.Λύση: • Για $0 < |z-1| < 1$,

$$\text{Θέτουμε } w = z-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(w+1)^2 w} = -\frac{1}{w} \cdot \left(\frac{1}{1+w} \right)'$$

$$\underline{[0 < |w| < 1]} \quad -\frac{1}{w} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n \right]'$$

$$= -\frac{1}{w} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w^{n-1}$$

$$= -\frac{1}{w} (-1 + 2w - 3w^2 + 4w^3 - \dots)$$

$$= \frac{1}{w} - 2 + 3w - 4w^2 + 5w^3 - \dots$$

$$= \frac{1}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+2) w^k$$

$$= \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+2) (z-1)^k \Rightarrow$$

5

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k, \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+1} (k+2), & k \geq 0 \\ 1, & k = -1, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}$$

• Για $|z-1| > 1$, θέτουμε

$$w = \frac{1}{z-1} \Rightarrow z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w}$$

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^2 \cdot w = w^3 \cdot \frac{1}{(1+w)^2}$$

$$= -w^3 \cdot \left(\frac{1}{1+w}\right)' \quad \underline{\underline{[|w| < 1]}}$$

$$= -w^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n w^{n-1}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+2}} =$$

$$= - \left[- \frac{1}{(z-1)^3} + 2 \frac{1}{(z-1)^4} - 3 \frac{1}{(z-1)^5} + \dots \right]$$

$$\underline{\underline{k = -(n+2)}} \quad - \sum_{k=-\infty}^{-3} (-k-2) (-1) (z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-3} (k+2) (-1)^k (z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k,$$

$$a_k = \begin{cases} (k+2) \cdot (-1)^k, & k \leq -3 \\ 0, & k \geq -2. \end{cases}$$

(iii) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το $z_0 = 0$ της

$$f(z) = z^3 e^{1/z}$$

στον "δακτύλιο" $|z| > 0$ (δηλ. στο "εμπνημένο" κυκλ. επιπέδο).

Λύση: $\forall z \neq 0,$

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-3}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^3 \frac{1}{(3-k)!} z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \text{όπου}$$

(7)

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{(3-k)!}, & k \leq 3 \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

Πιο αναλυτικά, για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^3 + \frac{1}{1!} z^2 + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} +$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^2} + \dots$$



Ορισμός 1: Έστω f ολόμορφη στον

"εμπνημένο" ανοικτό δίσκο

$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$) με αναπτύγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

(3)

Ο συντελεστής a_{-1} του $\frac{1}{z-z_0}$

ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο

της f στο z_0 .

Συμβολή: $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$.

Σχόλιο 1: Το ολοκλ. υπόλοιπο

στο z_0 ορίζεται καθώς, λόγω το
ανάπτυγμα Laurent (3) δεν εξαρτάται

από την ακτίνα $0 < R \leq \infty$, ώστε f
ολοκλήρωτη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Σχόλιο 2: Από το Θ. Laurent

γνωρίζουμε ότι οι συντελεστές $a_k, k \in \mathbb{Z}$

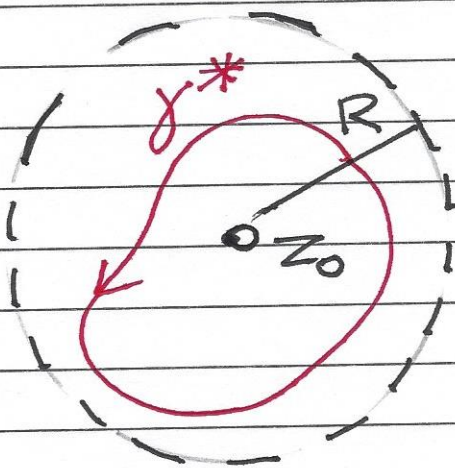
στο ανάπτυγμα (3) δίνονται από τις
σχέσεις

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου $\gamma \in \mathcal{C}_+$ τυχαία με

$$z_0 \in \text{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R).$$

Για $k = -1$,
παιρνουμε



$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i a_{-1} \\ = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$

(9)

Γενικότερα, έχουμε την παρακάτω:

Πρόταση 2: Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$

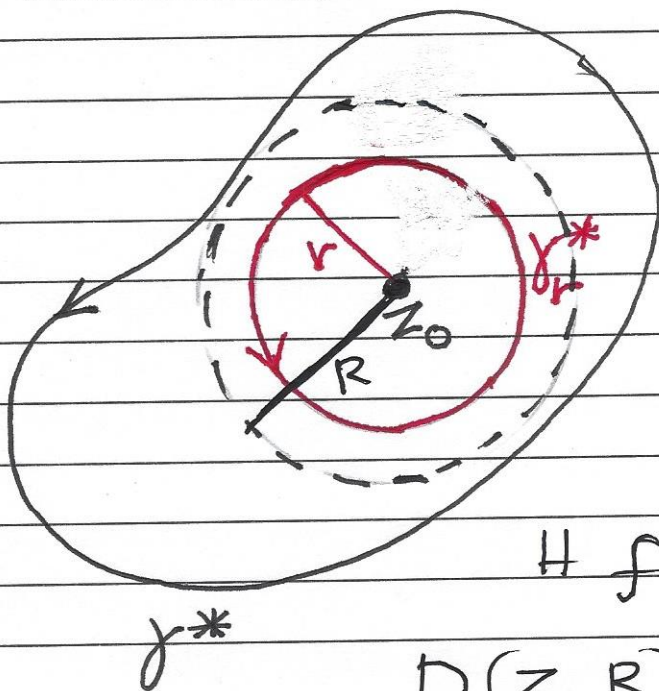
και U ^{κε} εσωτερικό $U = \text{int} \gamma^*$, $z_0 \in U$

και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_0\}$, ώστε

f συνεχής στο γ^* . Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$

Απόδειξη: Έστω $R > 0$ | $D(z_0, R) \subset U$.



Επιλέγουμε $r \in (0, R)$

και θέτουμε

$$\gamma_r(t) = z_0 + r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Η f είναι ολόμορφη στον

$D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ [O. Laurent]

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

και

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw,$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Ειδικότερα,

$$\int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i \alpha_{-1} = \\ = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Επειδή f ομομορφή στο πεδίο μεταξύ των γ^* , γ_r^* , από την Αρχή Παρακώρυψης παίρνουμε

$$\int_{\gamma} f(w)dw = \int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

□

Παραδείγματα:

(i) $\int_{\gamma} f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5}.$$

Λύση: f ομομορφή στο $\text{int} \gamma^* \setminus \{0\}$ και συνεχής στο γ^* [Πρότ. 2]

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Αλλά, $\forall z \neq 0$,

$$\frac{1}{z^5} e^{z^2} = \frac{1}{z^5} \left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^3} + \boxed{\frac{1}{2!} \frac{1}{z}} + \frac{1}{3!} z + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{\gamma} f = \underline{\underline{\pi i}}$$

(ii) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,
 $f(z) = z^4 \sin(1/z)$.

Λύση: $\forall z \neq 0$,

$$f(z) = z^4 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots \right)$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!} z + \boxed{\frac{1}{5!} \frac{1}{z}} - \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{5!}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{2\pi i}{5!} = \frac{\pi i}{60}$$

ΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΑΤΑΞΙΑ: _____

ΜΥΘΗΝΑ: _____

ΑΝΩΤΕΡΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: _____

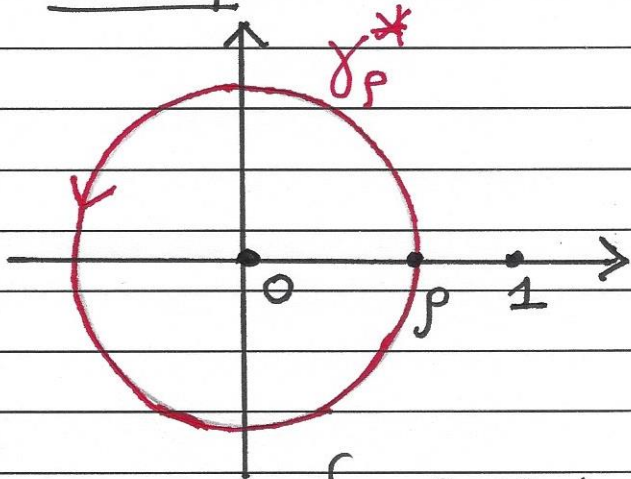
ΟΡΟΣ: _____

ΕΠΙΘΗΚΗ: _____

(iii) $\int_{\gamma_p} f(z) dz = ?$, όπου

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}, \quad \gamma_p(t) = \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < \rho < 1.$$

Λύση:



φορούμενη στο
 $\text{int} \gamma_p^* \setminus \{0\}$

και συνεχής στο
 $\gamma_p^* \xrightarrow{\text{πρόσ. 2}}$

$$\int_{\gamma_p} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0).$$

Για $0 < |z| < \rho (< 1)$,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \dots;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο γινόμενο των παραπάνω "δυναμοσειρών" είναι

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, 0) = e^{-1} \Rightarrow \int_{\gamma_p} f = 2\pi i (e^{-1}).$$

Γενίκευση της Πρότασης 2 είναι το παρακάτω

Θεώρημα 3 (Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων)

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$, $z_1, z_2, \dots, z_k \in U = \text{int}\gamma^*$
και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$

και συνεχής στο γ_k^* . Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

Απόδειξη:

Επιλέγουμε

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathcal{C}_+$$

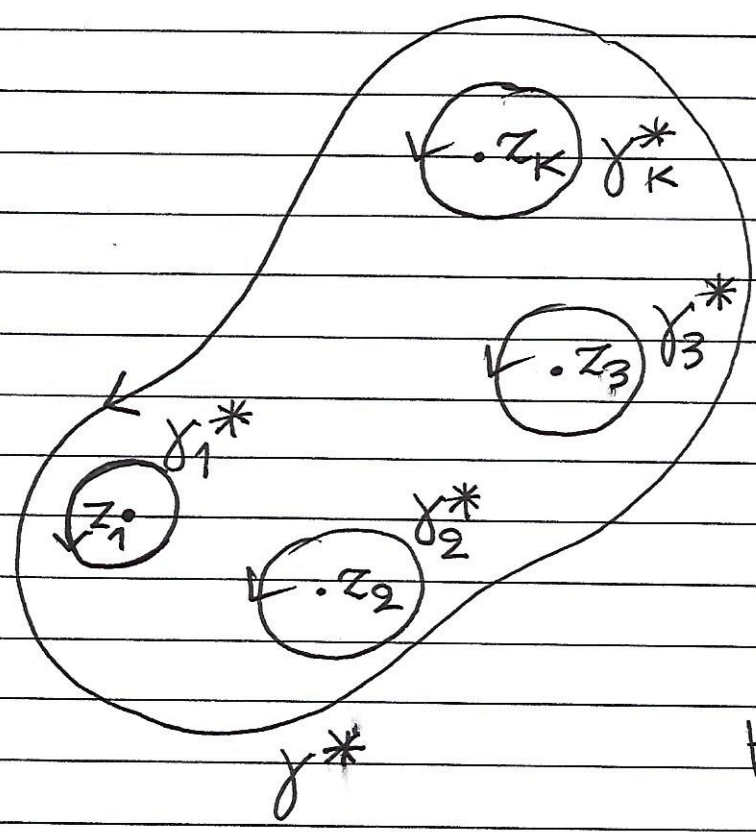
ώστε

$$\bullet z_j \in \text{int}\gamma_j^*, 1 \leq j \leq k$$

$$\bullet \gamma_j^* \subset U, 1 \leq j \leq k$$

$$\bullet \text{int}\gamma_\lambda^* \cap \text{int}\gamma_j^* = \emptyset,$$

$$\forall \lambda \neq j.$$



Γενικ. Αρχή Παραμ. \implies

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z) dz \quad (\text{Πρόσ. 2}) \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j). \quad \square \end{aligned}$$

Ταξινομήση μεμονωμένων ανώμαλων σημείων

Ορισμός 4: Ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται

μεμονωμένο ανώμαλο σημείο μιας
συνάρτησης f αν $\exists R > 0$ ώστε f
εξομορφή στον
 $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$,

δηλ. αν \exists ανοικτός δίσκος κέντρου z_0
που δεν περιέχει άλλα ανώμαλα σημεία
της f εκτός του z_0 .

Παραδείγματα:

(α) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Τα ανώμαλα σημεία

της f είναι $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τα οποία είναι
όλα μεμονωμένα. Πράγματι: έστω $k \in \mathbb{Z}$
και $R = \pi/2$. Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με

$\lambda\pi \in D(k\pi, R)$, τότε $|\lambda\pi - k\pi| < \pi/2$

$\Rightarrow |\lambda - k| < 1/2 \Rightarrow \lambda = k.$

$$(B) f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

Το 0 είναι μη μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f . Πράγματι:

$\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, το $z_n = 1/n\pi$ είναι ανώμαλο σημείο της f , ενώ

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Άρα, $\forall R > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$,

$$z_n \in D(0, R) \setminus \{0\}.$$



Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f . Τότε, $\exists R > 0 \mid$

f οζόμορη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

[~~0~~. Laurent] $\Rightarrow \exists! (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R. \quad (4)$$

Ορισμός 5: Το z_0 λέγεται απόμεινο αν

$$a_k = 0, \quad \forall k < 0.$$

Σχολίο!! Εάν z_0 απόμεινο, τότε

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0.$$

Έστω z_0 αρόμενο ανώμαλο σημείο της f
Τότε, για $0 < |z - z_0| < R$,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα προσομοιάζει με ανάπτυγμα Taylor αλλά δεν αποτελεί ανάπτυγμα Taylor γιατί

f δχι διαφορίσιμη στο z_0 .

Παρ' όλ' αυτά, επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{f} : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Πράγματι: θέτουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & z = z_0. \end{cases}$$

Τότε, $\forall z \in D(z_0, R)$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

$\implies \tilde{f}$ ολόμορφη στον $D(z_0, R)$

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα η παρακάτω

Πρόταση 5: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) z_0 αψόμενο ανώμαλο σημείο

(β) Στο ανάπτυγμα Laurent (4), ισχύει
 $a_k = 0, \forall k < 0$.

(γ) $\exists \tilde{f}$ ομόμορφη στο $D(z_0, R)$ |

$$\tilde{f}(z) = f(z), \forall z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$

(δ) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Παράδειγματα:

(α) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Προφανώς, 0 ανώμαλο σημείο της f .

Είναι $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = (e^z)' \Big|_{z=0} = 1 \in \mathbb{C}$

[Πρότ. 5]

\implies 0 αψόμενο. Παρατηρούμε ότι $\forall z \neq 0$,

το ανάπτυγμα Laurent της f στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots, \forall z \neq 0$$

δηλ. δεν εμφανίζονται δυνάμεις z^k με $k < 0$.

(β) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z(1 - \cos z)}$. Προφανώς, 0
 ακώμαλο σημείο
 της f.

• Το 0 είναι μεμονωμένο. Πράγματι,
 τα ακώμαλα σημεία της f είναι
 $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 και $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$

$2k\pi \notin D(0, \pi)$
 δηλ. ο $D(0, \pi)$ περιέχει μόνο το 0
 σαν ακώμαλο σημείο.

• Το 0 είναι απόκλειστο. Πράγματι:

$\forall z \in D(0, \pi) \setminus \{0\},$

$$f(z) = \frac{-z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \dots}{z(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \dots)}$$

$$= \frac{z^3(-1/3! + z^2/5! - z^4/7! + \dots)}{z^3(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \dots)}$$

$$= \frac{1/3! + z^2/5! - z^4/7! + \dots}{1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \dots}$$

$\implies \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{C}.$

Πόλοι

Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f
και

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R \quad (4)$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στον
"αφαιρούμενο" ανοικτό δίσκο
 $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}, \quad R > 0.$

Ορισμός 6: Το z_0 λέγεται πόλος αν το
σύνολο

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : a_k \neq 0, k < 0\}$$

είναι πεπερασμένο, μη κενό.

Π.χ. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$. Τότε, $\forall z \neq 0,$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} (z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$$

Πεπερ. πλήθος

\Rightarrow 0 = πόλος.

Έστω z_0 πόλος της f . Θέτουμε

$$m = \max \{ |k| : k \in S \}$$

Προφανώς,

$$\underline{a_m \neq 0}, \quad \underline{m \geq 1}$$

Ορισμός 7: Το m ονομάζεται τάξη του πόλου z_0 .

Π.χ. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$. $0 =$ πόλος τάξης 2.

Πρόταση 8: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) z_0 πόλος τάξης $m \geq 1$. \cup

(β) $\exists \tilde{\varphi}$ ολόμορφη σε περιοχή V του z_0 με $\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0$, $f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}$, $\forall z \in V \setminus \{z_0\}$

(γ) $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^m f(z)] \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: (α) \implies (β) (4)

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f .

Επειδή

$$m = \max\{|k| : k \in \mathbb{Z}, k < 0, a_k \neq 0\}$$

έχουμε

$$a_{-m} \neq 0$$

και

$$\forall k < -m, \text{ είναι } |k| = k > m \implies a_k = 0$$

$$\implies f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}}{(z-z_0)^{m-2}} +$$

$$+ \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \varphi(z), \quad 0 < |z-z_0| < R,$$

όπου

$$\varphi(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \dots,$$

για $0 < |z-z_0| < R$.

Θέτουμε

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & 0 < |z-z_0| < R \\ a_{-m}, & z = z_0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\tilde{\varphi}(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\forall z \in D(z_0, R)$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ορίζομενη στο $D(z_0, R)$.

Επιπλέον,

$$\tilde{\varphi}(z_0) = a_{-m} \neq 0$$

και

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

Θέτουμε $U = D(z_0, R)$.

(β) \Rightarrow (γ) Άμεσο.

(γ) ⇒ (α) Έστω z_0 ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R.$$

Τότε,

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{m+k} \quad \underline{\underline{\lambda = m+k}}$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda-m} (z-z_0)^\lambda, \quad \text{για}$$

$$0 < |z-z_0| < R$$

Το παραπάνω είναι το ανάπτυγμα Laurent της $(z-z_0)^m f(z)$ στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Όπως, $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^m f(z)] \in \mathbb{C} \quad \underline{\underline{[Πρόσ. 5]}}$

⇒ z_0 απόμεινο ανώτατο σημείο της

$$(z-z_0)^m f(z) \Rightarrow a_{\lambda-m} z_0, \quad \forall \lambda < 0$$

$$\Rightarrow \underline{a_k z_0}, \quad \forall k < -m$$

⇒ z_0 πόλος της f .

Επιπλέον, για $0 < |z-z_0| < R$,

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1} \cdot (z-z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^m f(z)] = a_{-m}$$

[Πρόταση] $a_{-m} \neq 0 \Rightarrow z_0$ πόλος τάξης m . ☒

Παραδείγματα:

(α) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$. Έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} =$$

$$= (\sin z)' \Big|_{z=0} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow 0$ πόλος τάξης 2.

(β) $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$. Έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\sin z} \right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow 0$ πόλος τάξης 1.

(γ) $f(z) = \frac{\sinh z}{(1 - \cosh z)^2}$. Έχουμε

$\forall z \in D(0, \pi) \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots\right)^2}$$

$$= \frac{z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots\right)}{z^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)^2}$$

$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} [z^3 f(z)] = \frac{1}{\left(\frac{1}{2!}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \neq 0$

\rightarrow ο πόλος τάξης 3.

ουσιώδη ανώμαλο σημεία

Ορισμός 8: Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f και

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

z_0 ανάπτυγμα Laurent της f στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Το z_0 λέγεται ουσιώδης ανώμαλο σημείο

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k < 0, a_k \neq 0\}$$

είναι άπειρο.

Παράδειγμα: $f(z) = z^4 \cos(1/z)$.

Για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^4 \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^6} + \dots \right)$$

$$= z^4 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{8!} \frac{1}{z^4} -$$

— ...

⇒ εμφανίζονται άπειρες δυνάμεις του $1/z$

⇒ 0 ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Συνοψίζοντας, ένα μεμονωμένο ανώμαλο

σημείο είναι

— είτε απόκλειο

— || πρόλος

— || ουσιώδες

Υπολογισμός Ολοκλ. Υπολοίπων
σε πόλους.

Πρόταση 9: Έστω z_0 πόλος τάξης $m \geq 1$ της συνάρτησης f .

Τότε,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Πρόταση 10: Έστω φ, ψ ολόμορφες σε περιοχή του z_0 με

$$\varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{Τότε, } \text{Res}\left(\frac{\varphi}{\psi}, z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Απόδειξη: Έστω $r > 0$ ώστε φ, ψ ολόμορφες στο $D(z_0, r)$.

$$\text{Είναι } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta \in (0, r) \mid \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} \neq 0, \forall z \in D(z_0, \delta) \text{ με } z \neq z_0$$

Για $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$,

$$(z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \neq 0$$

(27)

Από την Πρότ. 8, έπεται ότι z_0 πόλος

τάξης 1 της f/ψ [Πρότ. 9]

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f/\psi, z_0) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{f(z)}{\psi(z)} \right] \\ &= \frac{f(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0^6 = -1$.

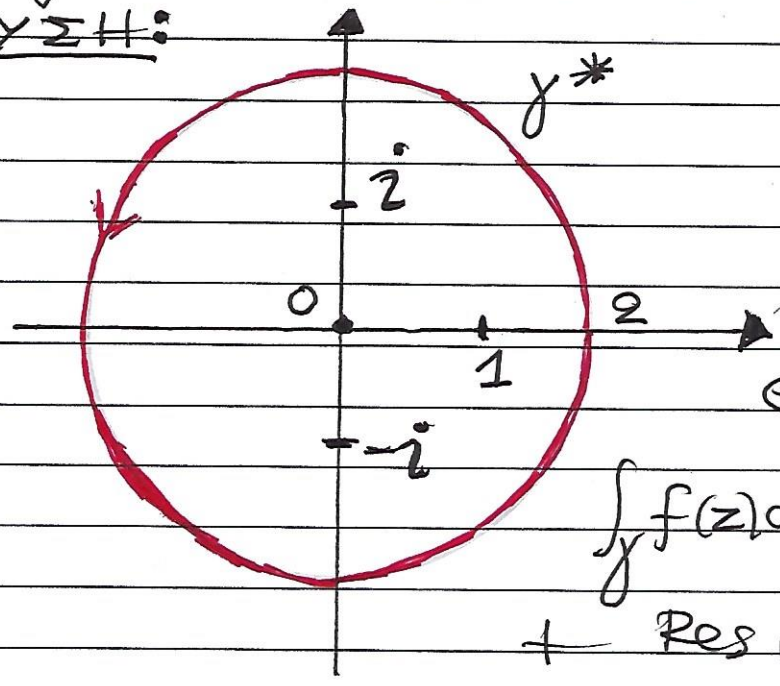
$$\begin{aligned} \text{Τότε, } \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^6+1}, z_0\right) &\text{ [Πρότ. 10] } \\ &= \frac{e^{z_0}}{6z_0^5} = \frac{z_0 e^{z_0}}{6z_0^6} = -\frac{z_0 e^{z_0}}{6} \end{aligned}$$

Εφαρμογές σε υπολογισμούς
μεγαδικών ολοκληρωμάτων

(1) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}$

$\gamma(t) = ze^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Λύση:



Ανώκοτα σημεία της f:

$\pm i, 1 \in \text{int} \gamma^*$

Θ. ολοκ. Υποα. \Rightarrow

$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, 1)]$

• Res(f, 1)

$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 f(z)] = e/2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow 1 = \text{πόλος τάξης } m=2$ [πρόσ-9]

$\Rightarrow \text{Res}(f, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 f(z)]'$

$= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z}{z^2+1} \right)'$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z^2+1) - 2ze^z}{(z^2+1)^2}$$

$$= \frac{(z-1)^2 e^z}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=1} = 0.$$

• Res(f, ±i). $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad \psi(z) = z^2+1.$$

$$\varphi(\pm i) \neq 0, \quad \psi(\pm i) = 0, \quad \psi'(\pm i) \neq 0$$

[Theorem]

$$\text{Res}(f, \pm i) = \frac{\varphi(\pm i)}{\psi'(\pm i)}$$

οπότε

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^i}{2i(i-1)^2} = e^{i/4},$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{e^{-i}}{-2i(-i-1)^2} = \cancel{e^{i/4}} \cdot e^{-i/4}$$

Άρα,

$$\int f(z) dz = 2\pi i \left(0 + \frac{e^i + e^{-i}}{4} \right) = \pi i \frac{e^i + e^{-i}}{2} = \underline{\underline{\pi i \cos(1)}}.$$

(2) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $\gamma(t) = ze^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$f(z) = \frac{e^z}{z^4 + 1}$.

ΛΥΣΗ: Τα ανώμαλα σημεία της f είναι οι 4ης τάξης ρίζες του -1 .

Επειδή $(e^{i\pi/4})^4 = e^{i\pi} = -1$,

ο $\alpha = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ είναι μια τέτοια ρίζα.

Όμως, το πολυώνυμο $z^4 + 1$ έχει πραγματική συμμετρική συντελεστές και είναι άρτια συνάρτηση, οπότε οι ρίζες του είναι

$\pm \alpha, \pm \bar{\alpha}$.

$\forall z_0 \in \{ \pm \alpha, \pm \bar{\alpha} \}$, έχουμε $|z_0| = 1 < 2$

και $z_0 \in \text{int} \gamma^*$

$\text{Res}(f, z_0) \stackrel{[\text{Πρόσ-10}]}{=} \frac{e^{z_0}}{4z_0^3} = \frac{z_0 e^{z_0}}{4z_0^4}$

$= -\frac{z_0 e^{z_0}}{4}$.

Θ. ομοια. Υποα. \implies

$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, \alpha) + \text{Res}(f, -\alpha) + \text{Res}(f, \bar{\alpha}) + \text{Res}(f, -\bar{\alpha})] =$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\underbrace{ae^a - a\bar{e}^a}_{\text{}} + \underbrace{\bar{a}e^{\bar{a}} - \bar{a}\bar{e}^{\bar{a}}}_{\text{}} \right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left[(ae^a + \bar{a}e^{\bar{a}}) - (a\bar{e}^a + \bar{a}\bar{e}^{\bar{a}}) \right]$$

$$= -\pi i \left[\operatorname{Re}(ae^a) - \operatorname{Re}(a\bar{e}^a) \right],$$

όπου $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(3) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$,
 $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:

Ανώκοτα σημεία: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Μόνο $z = 0 \in \operatorname{int} \gamma^*$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

$\forall z \in \mathbb{D}$, $z^2 \sin z = z^3 \psi(z)$, όπου

$$\psi(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

$$\underline{\psi(0) = 1}, \quad \underline{\psi'(0) = 0}, \quad \frac{\psi''(0)}{2!} = -\frac{1}{3!}$$

$$\Rightarrow \underline{\psi''(0) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3}}$$

Επειδή $\psi(0) \neq 0$ και ψ ανάλυση στο \mathbb{C} ,

\exists περιοχή U του 0 ώστε
 $\eta \varphi = \frac{1}{\psi}$ ανάλυση στο U .

Επιπλέον,
 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}, z \in U \setminus \{0\}, \varphi(0) \neq 0.$

[Πρόταση 8] \Rightarrow ο πόλος τάξης $m=3$

[Πρότ. 9]
 $\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} [z^3 f(z)]''$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \varphi''(z) = \frac{\varphi''(0)}{2}$$

$$\text{Αλλά } \varphi' = -\frac{\psi'}{\psi^2}, \quad \varphi'' = -\frac{\psi''\psi^2 - \psi'2\psi\psi'}{\psi^4}$$

$$\Rightarrow \varphi''(0) \stackrel{[\psi'(0)=0]}{=} -\frac{\psi''(0)\psi^3}{\psi(0)^2} = \frac{1/3}{1^2}$$

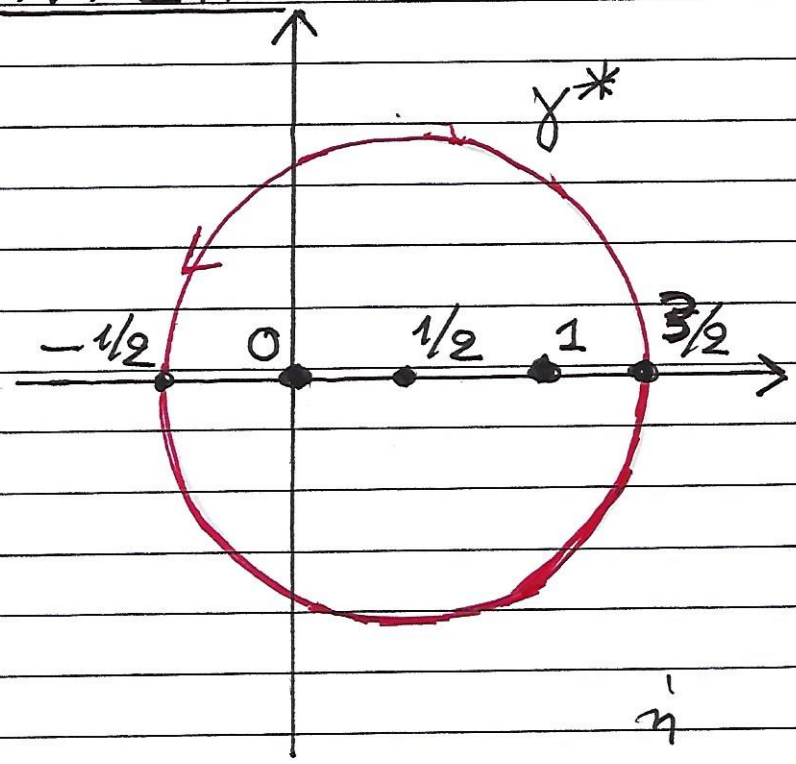
$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6} \quad = 1/3$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i / 6 = \underline{\underline{\pi i / 3}}$$

(4) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $f(z) = \frac{z-1}{\sin(\pi z)}$

$\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

ΛΥΣΗ:



Ανώμαλα σημεία:
 $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\gamma = |z - \frac{1}{2}| = 1$

Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με

$|\lambda - \frac{1}{2}| < 1$, έχουμε

$-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$

ή $\lambda = 0$ ή 1 .

Επομένως, μόνο τα $0, 1 \in \text{int} \gamma^*$ \Rightarrow

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)]$

$\bullet \text{Res}(f, 0) = \frac{z-1}{[\sin(\pi z)]'} \Big|_{z=0} =$

$= \frac{z-1}{\pi \cos(\pi z)} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{\pi}$

• Res(f, 1) = ?

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{\sin(\pi z) - \sin(\pi \cdot 1)} \\ &= \frac{1}{[\sin(\pi z)]' \Big|_{z=1}} = \frac{1}{\pi \cos \pi} \\ &= \frac{-1}{\pi} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

⇒ 1 = αυτόμερο ⇒ Res(f, 1) = 0.

Άρα,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{-1}{\pi} + 0 \right) = \underline{\underline{-2i}}$$

(5) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(1 - \cos z)}$,

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Ανώμαλα σημεία: $2\lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$,

δηλ. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Μόνο $0 \in \text{int} \gamma^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

$\forall z \in D(0, \pi) \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(1 - \cos z)} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots)}$$

$$\equiv \frac{zA(z)}{z^3B(z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{A(z)}{B(z)},$$

όπου

$$A(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots,$$

$$B(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots,$$

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad B(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},$$

$$B'(0) = 0.$$

Επειδή $A(\cdot), B(\cdot)$ ολόμορφες στο \mathbb{C} και $B(0) \neq 0$, η $\varphi = A/B$ είναι ολόμορφη

σε περιοχή U του 0.

Επιπλέον,

$$\varphi(0) \neq 0, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \forall z \in U \setminus \{0\}$$

[Πρότ. 8] $0 =$ διπλός πόλος της f

$$\Rightarrow$$
 [Πρότ. 9] $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)]' =$

(36)

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \rho'(z) = \rho'(0) = \frac{A'(0)B(0) - A(0)B'(0)}{[B(0)]^2}$$

$$\underline{[B'(0) \neq 0]} \quad \frac{A'(0)}{B(0)} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Επομένως,

$$\text{Res}(f, 0) = 1 \implies \int_{\gamma} \underline{\underline{f(z) dz}} = 2\pi i.$$

$$(6) \int_{\gamma} f(z) dz = ?, \quad f(z) = \frac{\bar{z} e^{z^2}}{z^6} + z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

ΛΥΣΗ:
 $\forall z \in \gamma^*$

$$\frac{\bar{z} e^{z^2}}{z^6} = \frac{1}{z^7} \left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \dots$$

 $f_1(z)$

$$\implies \int_{\gamma} \frac{\bar{z} e^{z^2}}{z^6} dz = \int_{\gamma} f_1(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f_1, 0)$$

$$= 2\pi i / 3! = \pi i / 3.$$

Επιπλέον, $\forall z \neq 0$,

$$z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^7 \left(1 - \frac{1}{2! z^4} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^8} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^{12}} + \dots \right)$$

$$= z^7 - \frac{z^3}{2!} + \boxed{\frac{1}{4!} \frac{1}{z}} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^5} + \dots$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right) = 2\pi i / 4! = \frac{\pi i}{12}$$

Άρα,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi i}{3} + \frac{\pi i}{12} = \frac{5\pi i}{12}$$

(7) $\int_{\gamma} f(z) dz = ?$, $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

ΛΥΣΗ: Είναι $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

$$\forall z \neq 0, f(z) = e^{z + \frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! z^m}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{z}\right)^{m-n}$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα προκύπτει για $m - n = 1$

Άρα, $\Leftrightarrow m = n + 1$

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)!}$$