

ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE

Θεώρημα 1 (Liouville) Έστω f ακέραια

συνάρτηση, δηλ. f ολόμορφη στο \mathbb{C} και
φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, f σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $n \geq 1, R > 0,$

$$\gamma_R(t) = R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Από ολοκλ. τύπους Cauchy για παραγωγούς
παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$, $\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$

(ML-ανισ.) $\Rightarrow |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n}.$

Η ανισότητα ισχύει $\forall R > 0$ κ' $\frac{n!M}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 1$

\Rightarrow Taylor $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$= f(0). \quad \square$

(2)

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ανάλογο του Θ. Liouville για διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Π.χ.

$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
αλλά f μη σταθερή.

Άσκησης:

(1) Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια ώστε η $u = \operatorname{Re} f$ να είναι φραγμένη άνω. Τότε, f σταθερή.

Λύση: Έστω $M > 0$ ώστε

$\operatorname{Re} f(z) \leq M, \forall z \in \mathbb{C}.$

Θέσω $g = e^f$. Τότε, g ακέραια και

$\forall z \in \mathbb{C}, |g(z)| \leq e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M$

Θ. Liouville
 $\Rightarrow g = \text{σταθερά}$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, 0 = g'(z) = f'(z) e^{f(z)} \Rightarrow f'(z) = 0$

$\Rightarrow f = \text{σταθερή}.$

μη σταθερή

(2) Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια & $a \in \mathbb{C}$.

Τότε, $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C} \mid |f(z) - a| < \varepsilon.$

Λύση: Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε,

$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}, |f(z) - a| \geq \varepsilon.$

Θέτουμε

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, g ακέραια και $|g(z)| \leq 1/\varepsilon, \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow g = \text{σταθερή} \Rightarrow \dots \Rightarrow f = \text{σταθερή} \quad (\text{ΑΤΟΠΟ})$$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια ώστε

$$f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \text{ και } \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \ell > 0.$$

Να δ.ο. f σταθερή.

Λύση: $\exists R > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| > R,$
 ισχύει

$$|f(z)| > \ell/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} < 2/\ell.$$

Θέτουμε $g = 1/f \Rightarrow g$ ακέραια.

Επειδή g συνεχής στο κλειστό εξοραγμένο

σύνολο $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}, \exists M > 0 \mid$

$$\forall |z| \leq R, \quad |g(z)| \leq M.$$

Τελικά, $\forall z \in \mathbb{C},$

$$|g(z)| \leq \max\{M, 2/\ell\}$$

(Θ. Liouville)

$$\Rightarrow g = \text{σταθερή} \Rightarrow f = \text{σταθερή}.$$