

1. ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στο σώμα \mathbb{R} , η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν
έχει λύση.

Θέλουμε να επεκτείνουμε το \mathbb{R} σε ένα
σώμα $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, μέσα στο οποίο η
παραπάνω εξίσωση να έχει λύση.

Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 = \{(a, \beta) : a, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ορίζουμε

→ Πρόσθεση: $(a, \beta) + (\gamma, \delta) = (a + \gamma, \beta + \delta)$.

→ Πολλαπλασιασμός: $(a, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (a\gamma - \beta\delta, a\delta + \beta\gamma)$.

Μονάδα (ουδέτερο στοιχείο του (\cdot))
είναι το $(1, 0) \equiv \mathbf{1}$

Πράγματι $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \cdot (1, 0) &= (\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 0, \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1) \\ &= (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Θέτουμε $i = (0, 1)$. Τότε,

$$\begin{aligned} i^2 = i \cdot i &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) = - (1, 0) \\ &= \boxed{-1}! \end{aligned}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$, δεχόμαστε την ταύτιση
 $(a, 0) \equiv a$.

Τότε, $\forall (a, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a, \beta) = (a, 0) + \beta(0, 1) \equiv a + \beta i$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \underbrace{\{a + \beta i \mid a, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}}_{\mathbb{C}}$$

Το \mathbb{C} λέγεται σύνολο μιγαδικών
αριθμών.

→ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ διότι $\forall a \in \mathbb{R}$,
 $a \equiv (a, 0) \equiv a + 0 \cdot i$

→ $a + \beta i = \gamma + \delta i \iff [a = \gamma, \beta = \delta]$.

$$T_0 \quad \mathbb{C} = \{ a + \beta i \mid a, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

είναι σύνθετα με τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Πρόσθεση: } (a + \beta i) + (\gamma + \delta i) &= \\ &= (a + \gamma) + (\beta + \delta)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Πολλαπλασιασμός: } (a + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) &= \\ &= (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i \end{aligned}$$

→ Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:

$$0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$$

→ Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού:

$$1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$$

→ Αντιθέτως μιγαδικού:

$$\underline{- (a + \beta i) = (-a) + (-\beta)i \in \mathbb{C}}$$

Αντίστροφος μιγαδικού:

Έστω $\alpha + \beta i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, δηλ. $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Τότε,

$$\frac{1}{\alpha + \beta i} = \frac{\alpha - \beta i}{(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 - (\beta i)^2}$$

$$= \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \left(-\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) i \in \mathbb{C}.$$

Συμβολισμός: Ένας μιγαδικός αριθμός

συμβολίζεται συνήθως με z, w, a, \dots

Ορισμός 1.1: Έστω $z = a + \beta i \in \mathbb{C}$.

→ $a = \text{πραγματικό μέρος του } z = \text{Re}(z)$.

→ $\beta = \text{φανταστικό μέρος του } z = \text{Im}(z)$.

→ 0 \neq λ λέγεται φανταστικός αν $\operatorname{Re}(z) = 0$,

δηλ. αν είναι της μορφής βi , $\beta \in \mathbb{R}$.

Συμβολισμός: $I = \{\beta i \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

ΣΧΟΛΙΑ:

(i) Οι πράξεις $(+)$, (\cdot) στο \mathbb{C} έχουν όλες τις ιδιότητες των αντίστοιχων πράξεων στο \mathbb{R} (π.χ. ταυτότητες) εκτός από μία:

Εάν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z^2 + w^2 = 0$, δεν έπεται

ότι $z = w = 0$.

π.χ. $i^2 + 1^2 = 0$, $i \neq 0$, $1 \neq 0$.

(ii) Στο \mathbb{Q} δεν μπορεί να ορισθεί διάταξη

με τις ίδιες ιδιότητες της κλασικής

διάταξης στο \mathbb{R} (δηλ. οική κ' συμβατή με τις πράξεις του \mathbb{Q}).

Πράγματι: Έστω $(<)$ μια τέτοια διάταξη.

Επειδή $i \neq 0$, θα πρέπει $i > 0$ ή $i < 0$.

→ Εάν $i > 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow \underline{-1 > 0}$ (*)

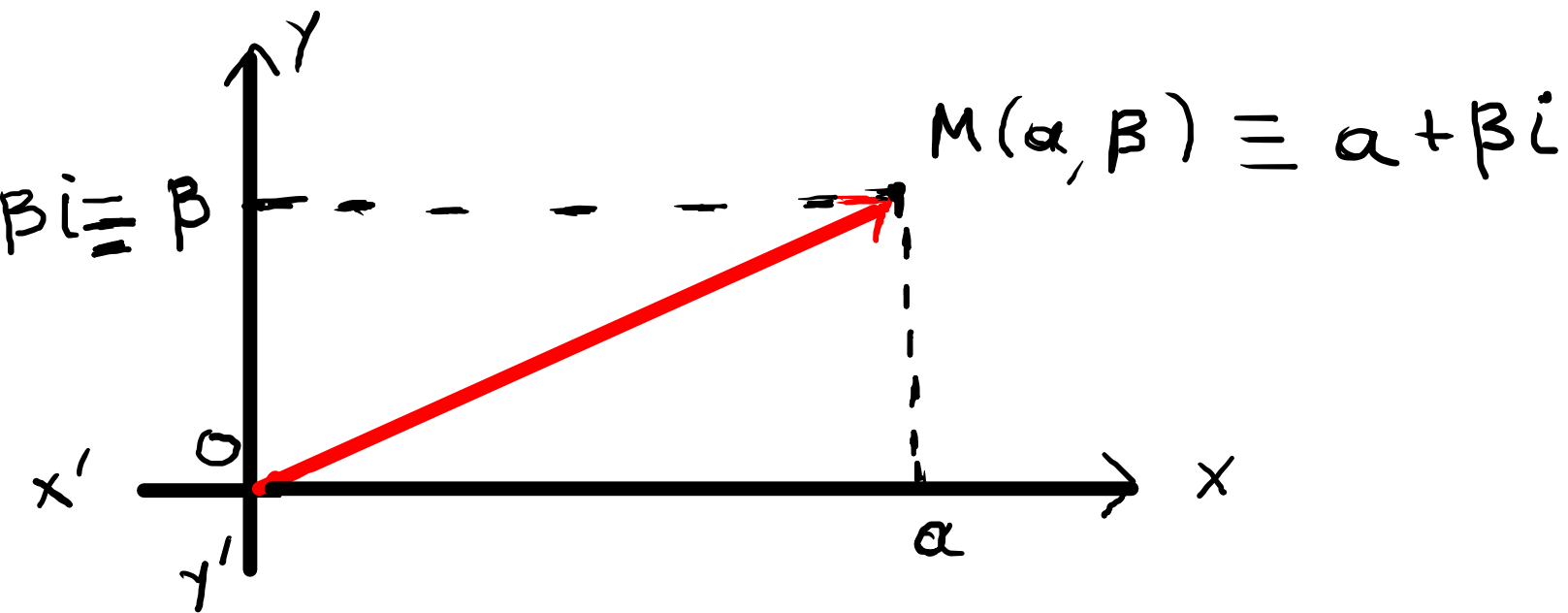
$\Rightarrow (-1) \cdot (-1) > 0 \Rightarrow \underline{1 > 0}$ (**)

Με πρόσθεση των (*), (**) παίρνω 0 > 0
(Ατοπία!)

→ Εάν $i < 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$

κ. λ. π. καταλήγει όπως πριν στο
 $0 > 0$ (ΑΤΟΠΟ!)

Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών



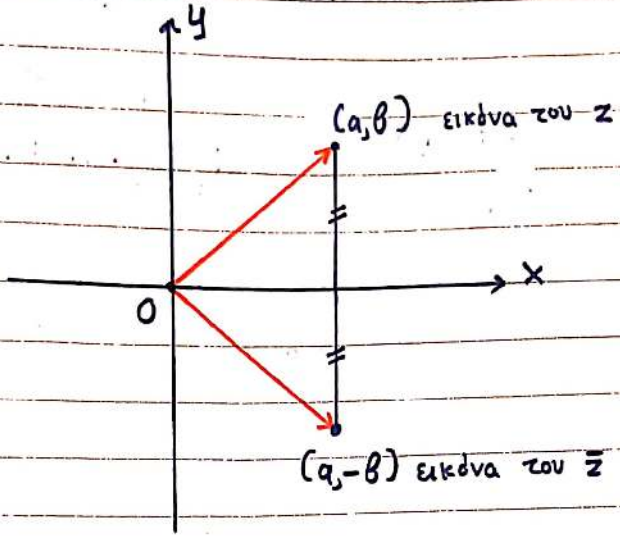
- $x'x \rightarrow$ άξονας των πραγματικών
- $y'y \rightarrow$ " " φανταστικών

Συζυγής Μιγαδικός

$$z = a + \beta i, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = a - \beta i$$

$$\text{άρα } \overline{(\bar{z})} = z$$



Ιδιότητες

(i) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ και $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{I}$

(ii) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ και $\overline{az} = a \cdot \bar{z}, \forall a \in \mathbb{R}$ Γραμμικότητα του συζυγούς

(iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$

(v) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ Πολύ χρήσιμη

(vi) $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z) \cdot i$

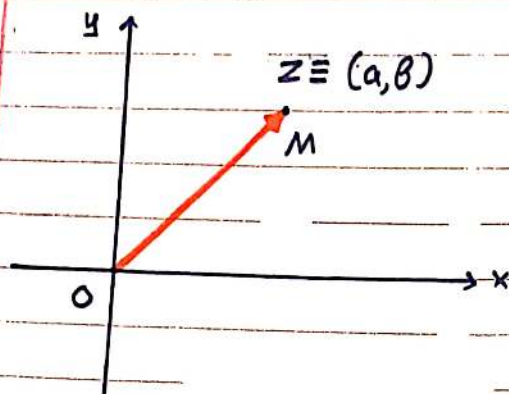
(vii) $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

4

Μέτρο

$$z = a + \beta i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + \beta^2}, \quad |z| \geq 0 \text{ πάντα}$$



δηλ. $|z| = |\vec{OM}|$

Ιδιότητες

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$

2 πολύ εφυπηρετικές μορφές της ιδιότητας αυτής

(i) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Μαγική Ιδιότητα $\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z} \Leftrightarrow z = \frac{|z|^2}{\bar{z}}$

(ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Απόδ. $|z \cdot w|^2 \stackrel{(i)}{=} (zw) \cdot \overline{(zw)} =$
 $= z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} =$
 $= (z \cdot \bar{z}) \cdot (w \cdot \bar{w}) \stackrel{(i)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \text{ ὅ. ἔ. ἔ.}$

iii) Εάν $w \neq 0$: $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

(iv) $|\bar{z}| = |z|$

(v) $|z|=1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{\bar{z}}$

Πολύ χρήσιμο σε Ασκήσεις

(vi) Ιδιότητα Παραλληλογραμμου
(ή Θεώρημα Διαμέσων αν το δεις Γεωμετρικά)

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

Απόδειξη:

Ο μόνος τρόπος να χειρισθείς μέτρο αθροίσματος ή μέτρο διαφοράς είναι να υψώσεις στο τετράγωνο (ακόμα και αν το τετράγωνο δεν υπάρχει στην τελική σχέση) και μετά να χρησιμοποιήσεις την ιδιότητα (i).

$|z+w|^2 = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$, ομοίως:

$|z-w|^2 = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο, ο.ε.δ.

(vii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $|z^n| = |z|^n$

6

(viii)

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Real}(z\bar{w})$$

Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στο ότι :

$$\text{Εάν } a \in \mathbb{C}, \text{ τότε } a + \bar{a} = 2 \operatorname{Real}(a)]$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) = \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Real}(z\bar{w})} \Leftrightarrow (\text{είναι το ίδιο με})$$

$$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Real}(\bar{z}w)} \quad \text{ό.έ.δ.}$$

(ix)

$$|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Real}(z\bar{w})$$

Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στην ίδια ιδιότητα με πριν]

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w) \cdot (\bar{z} - \bar{w}) = \\ &= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 - [z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})}] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Real}(z\bar{w})} \Leftrightarrow (\text{είναι το ίδιο με})$$

$$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Real}(\bar{z}w)} \quad \text{ό.έ.δ.}$$

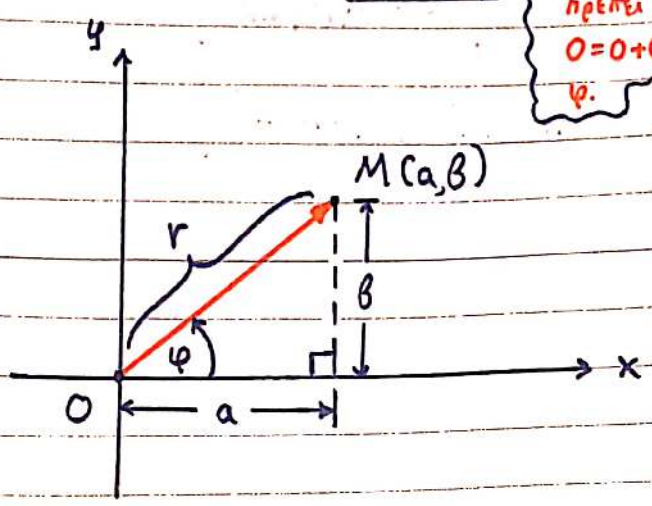
Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού.

(καθοριστικής σημασίας για πράξεις και κυρίως για ύψωση σε μεγάλες δυνάμεις)

Αν: $z = a + bi$

$z \neq 0$

Προσοχή! για να έχει τριγωνομετρική μορφή ένας μιγαδικός πρέπει υποχρεωτικά να είναι διδιυποσ του $0 = 0 + 0i$, ώστε να μπορεί να οριστεί γωνία φ .



Είναι:

$a = r \cdot \cos \varphi$ k'

$b = r \cdot \sin \varphi$

Άρα: $z = a + bi \iff$

$z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi \iff$

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff$

$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad \textcircled{1}$

Τριγωνομετρική Μορφή του μιγαδικού z

Σχόλιο: Εάν η φ ικανοποιεί την $\textcircled{1}$ τότε και $\forall k \in \mathbb{Z}$, η $\varphi + 2k\pi$ επίσης ικανοποιεί την $\textcircled{1}$.

8

Όριος : Μια γωνία φ που ικανοποιεί την ① ονομάζεται όριος του z .

Η μοναδική $\varphi_0 \in [-\pi, \pi]$ που ικανοποιεί την ① ονομάζεται πρωτεύον όριος του z , και συμβολίζεται με:

$$\varphi_0 = \text{Arg}(z)$$

δηλ. $\text{Arg}(z) \in [-\pi, \pi]$

Πρόταση 1: Πολύ χρήσιμη, θα την χρησιμοποιούμε συνέχεια.

Έστω $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($z, w \neq 0$ για να μπορεί να οριστεί τριγωνομετρική μορφή γ' αυτούς)

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$w = |w| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \quad \text{τότε:}$$

Μιγάδι-
κοι ίσοι

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet |z| = |w| & \text{μέτρα ίσα} \\ \bullet \exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi & \text{ορίσματα που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλό του } 2\pi \end{cases}$$

Απόδειξη:

(\Leftarrow): άμεσο

(\Rightarrow): Έστω ότι $z = w$

• Τότε $|z| = |w|$, προφανώς

• $z = w \xrightarrow[\text{από } z, w \neq 0]{|z| = |w| \neq 0} \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \theta & \text{I} \\ \sin \varphi = \sin \theta & \text{II} \end{cases}$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos \varphi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \theta \stackrel{\text{I}}{=} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \stackrel{\text{II}}{=}$$

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin \varphi \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \varphi \stackrel{\text{I}}{=} \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0 \stackrel{\text{II}}{=}$$

Άρα $\exists k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi$

Άρα ο.ε.δ.

Η Εκθετική Συνάρτηση e^z , $z \in \mathbb{C}$

Το πρόβλημα είναι να το ορίσουμε για z φανταστικό γιατί τότε τελειώσαμε.

Κίνητρο: Θυμάμαι την Δυναμοσειρά της e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $x = \beta i$, $\beta \in \mathbb{R}$ (κάπως περίεργο αλλά το κάνω)

$$e^{i\beta} = 1 + \frac{i\beta}{1!} + \frac{i^2\beta^2}{2!} + \frac{i^3\beta^3}{3!} + \frac{i^4\beta^4}{4!} + \frac{i^5\beta^5}{5!} + \frac{i^6\beta^6}{6!} + \dots =$$

$$= \left(1 + \frac{\beta}{1!} \cdot i - \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} \cdot i + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^5}{5!} \cdot i - \frac{\beta^6}{6!} + \dots\right) =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(\frac{\beta}{1!} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \underline{\cos \beta + i \cdot \sin \beta}$$

(άρα αν πρόκειται να ορίσω κάπως το $e^{i\beta}$ θα πρέπει να το ορίσω έτσι:

⊛ και εδώ ανακατάταξη τους όρους δυναμοσειράς χωρίς να ξέρω αν συγκρίνει απολύτως (περίεργο αλλά το κάνω)

(11)

Ορισμός 2 : $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \sin\beta$$

↪ Τύπος του Euler

Ορισμός 3 : Εάν $z = a + bi$, $a, \beta \in \mathbb{R}$,

ορίζουμε $e^z = e^a \cdot (\cos\beta + i \sin\beta) = e^a \cdot e^{i\beta}$

Ιδιότητες:

(i)

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, |e^{i\beta}| = 1$$

(ii)

$$\forall z \in \mathbb{C}, |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ

χρησιμοποιείται σε τριγ.

σε διάφορες ασκήσεις.

(iii)

$$e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

Απόδειξη:

Απ' την (ii) έχουμε $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$

αφού $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$, άρα $|e^z| \neq 0 \Leftrightarrow$

$e^z \neq 0$, ὁ.ἔ.δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το $e^z > 0$ είναι ΛΑΘΟΣ γιατί
ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ διάταξη στους μιγαδικούς!

(iv)

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

(v) Η εκθετική συνάρτηση e^z έχει $2\pi i$ - περιodicότητα

(όχι μόνο δεν είναι 1-1 όπως η $e^x, x \in \mathbb{R}$, αλλά επιπλέον είναι η' περιodicή)

$e^z = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid z - w = 2k\pi i$ ή αλλιώς \downarrow

$e^{z+2k\pi i} = e^z$

Απόδειξη:

$z = a + \beta i, w = \gamma + \delta i$

$e^z = e^w \iff e^a \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = e^\gamma \cdot (\cos \delta + i \sin \delta)$

Πρόταση 1 $\left\{ \begin{array}{l} e^a = e^\gamma \\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid \beta - \delta = 2k\pi \end{array} \right.$ $\xleftrightarrow[\text{αφού } a, \gamma \in \mathbb{R}]{y = e^x \text{ είναι 1-1 στο } \mathbb{R}}$

$\begin{cases} a = \gamma & \textcircled{\text{I}} \\ \beta - \delta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$ $z - w = a + \beta i - \gamma - \delta i \stackrel{\textcircled{\text{I}}}{\iff}$

$z - w = (\beta - \delta) i \stackrel{\textcircled{\text{II}}}{\iff} \frac{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε}}{2k\pi i}, \text{ ο.έ.δ.}$

(vi) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{Z}, (e^z)^\lambda = e^{\lambda z}$

Απόδειξη: με επαγωγή

Τύπος De Moivre

$$\text{Αν } z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z \neq 0,$$

τότε $\forall n \in \mathbb{Z} : \text{(για κάθε εκθέτη ακέραιο)}$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

Απόδειξη:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$z^n = |z|^n \cdot (e^{i\varphi})^n \quad \underline{\underline{(iv)}}$$

$$= |z|^n \cdot e^{in\varphi} =$$

$$= |z|^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] \quad \underline{\underline{\text{ο.ε.δ.}}}$$

Εφαρμογή: $(1+i)^{10} = ?$

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad , \quad \arg$$

$$1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

αυτός είναι ο τρόπος
για να βρούμες τριγωνο-
μετρική μορφή
μικαδικού από καρτε-
σιανή.

$$\text{Άρα: } (1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \cdot \left[\cos \frac{10\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{10\pi}{4} \right] =$$

$$= 2^5 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{2} \right) =$$

$$= 2^5 \cdot \left[\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\underline{(1+i)^{10} = 2^5 \cdot (0 + 1i) = 32i}$$

Τύπος De Moivre

Αν $z \neq 0$ με $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

τότε:

$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Συμπληρωματικά:

Εαν $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ με $z \neq 0$ και $w \neq 0$

(i) $z \cdot w = |z \cdot w| \cdot e^{i(\varphi + \theta)}$

που είναι κατ' ευθείαν σε τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

(ii) $\frac{z}{w} = \left| \frac{z}{w} \right| \cdot e^{i(\varphi - \theta)}$

δηλ.:

$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$

$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$

arg και Arg, δηλ. ένα δυνατό όρισμα και όχι απαραίτητα το πρώτον όρισμα

δηλ.: Εαν φ, θ όρισμα των z, w τότε:

→ το $\varphi + \theta$ είναι ένα όρισμα του $z \cdot w$

→ το $\varphi - \theta$ είναι ένα όρισμα του $\frac{z}{w}$

Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Ρίζες της Μονάδας

Αναζητούμε ρίζες της εξίσωσης: $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ (1) $(z \in \mathbb{C})$

[π.χ. $z^5 = 1$, $z = 1$; αν $z \in \mathbb{C}$]

Εδώ φαίνεται η πολύ μεγάλη χρησιμότητα της Τριγωνομετρικής Μορφής και του τύπου De Moivre.

Έστω $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ μια ρίζα της εξίσωσης $z^n = 1$ με $-\pi < \varphi \leq \pi$ \hookrightarrow προφανώς το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, δηλ. οποιαδήποτε ρίζα της είναι $\neq 0$, άρα θα έχει τριγωνομετρική μορφή.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow |z|^n \cdot e^{in\varphi} = 1 \cdot e^{i0} \Leftrightarrow$ (αναγκαστικά)

$$\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\varphi - 0 = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z| = 1 \text{ (I)} \\ \varphi = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ σίγουρα οι ρίζες είναι μιγαδικές με μέτρο 1}$$

Προσοχή! Αν όμως σταματήσουμε εδώ, έχουμε ότι μια εξίσωση n -οστού βαθμού έχει άπειρες ρίζες για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$; ενώ ως n -οστού βαθμού μπορεί να έχει το πολύ n ρίζες.

Άλλωστε δεν έχει νόημα να έχουμε ρίζες για όλες τις άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$, αφού αν π.χ. έχουμε μια ρίζα για $k=a$ τότε αυτή θα έχει όρισμα $\varphi = \frac{2a\pi}{n}$

και η ριζα για $k=a+n$ θα έχει ορισμα $\theta = \frac{2a\pi}{n} + 2\pi$, δηλ. τα ορισματα των 2 αυτων ριζων θα διαφέρουν κατα 2π , δηλ. οι δύο αυτες ριζες θα είναι ιδιες. Παρατηρούμε δηλ. ότι για τιμές του k εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους, οι ριζες αρχίζουν και επαναλαμβάνονται.

Για αυτό κάνουμε το εξής:

Εαν $k \geq n$, εκτελώ την Ευκλείδια Διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} k & n \\ \hline u & m \end{array}$$

$u = 0, 1, 2, \dots, n-1$, άρα

$\varphi = \frac{2k\pi}{n} = \frac{2(m \cdot n + u)\pi}{n} = 2m\pi + \frac{2u\pi}{n} \Leftrightarrow$

$\varphi = 2m\pi + \frac{2u\pi}{n}$, $u = 0, 1, 2, \dots, n-1$, άρα

$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \stackrel{|z|=1}{=} e^{i(2m\pi + \frac{2u\pi}{n})} \Leftrightarrow (n \text{ } e^z \text{ είναι } 2\pi i \text{ περίοδική})$

$z = e^{i \frac{2u\pi}{n}}$, $u = 0, 1, 2, \dots, n-1$, άρα:

Θεώρημα:

για $n=0$ η εξίσωση δεν έχει νόημα γιατί γίνεται $1=1$ που ισχύει πάντα ως ταυτοτητα

Για $n \geq 1$, οι n -οστές ριζες της μονάδος (δηλ. οι ριζες της εξίσωσης $z^n=1$) είναι οι:

→ τύπος ισοδύναμο χρησιμοποιείται απ' εφω

$z_u = e^{i \frac{2u\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2u\pi}{n}\right)$, $u = 0, 1, 2, \dots, n-1$

- Παρατηρήσεις:
- 1) Οι n -οστές ριζες της μονάδος είναι n το πλήθος
 - 2) Είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους (δηλ. όλες έχουν πολ/τητα 1)
 - 3) Πάντα μια ριζα της μονάδος θα είναι το 1

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $z^6 = 1$.

Λύση:

Για $u=0$: $z_0 = 1$ είναι πάντα ρίζα.

Για $u=1$: $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Για $u=2$: $z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) =$
 $= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Για $u=3$: $z_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) \Leftrightarrow z_3 = -1$

Για $u=4$: $z_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) =$
 $= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Για $u=5$: $z_5 = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) =$
 $= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Επομένως οι 6^{es} ρίζες της μονάδας είναι οι:

$$\pm 1, \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right), \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

όπου το $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}$

Παρατήρηση:

► Σχετικά με τις n-οσές ρίζες της μονάδας:

- αν n είναι άρτιος: τότε ρίζες είναι το ± 1 και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών και αντιθέτων.
- αν n είναι περιττός: τότε ρίζες είναι το $+1$ και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών.

► Σχετικά με τις n-οσές ρίζες ενός πραγματικού αριθμού:

Γενικά και για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ οι n-οσές ρίζες ενός οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού $a \in \mathbb{R}$ είναι αλληλοσυζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, εμφανίζονται δηλ. σε ζεύγη συζυγών.

Γενίκευση για Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Θεώρημα:

Οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Υποθέτω $a = |a| e^{i\theta}$

Οι ρίζες του μιγαδικού αριθμού a είναι:

$$z_u = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \left(\frac{\theta + 2u\pi}{n} \right)} \quad u = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

(93)

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = i$

$$z^3 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$z_u = \sqrt[3]{|i|} \cdot e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2u\pi}{3} \right)} \quad u = 0, 1, 2 \quad ; \text{ άρα}$$

$$\text{Για } u=0: z_0 = e^{i \frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Για } u=1: z_1 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right)} = e^{i \frac{5\pi}{6}}$$

$$= \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \Leftrightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Για } u=2: z_2 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right)} = e^{i \frac{9\pi}{6}} = e^{i \frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \Leftrightarrow z_2 = -i$$

Προσοχή! Δεν έχω ρίζες και τους συζυγείς μιγαδικούς γιατί η πολυωνυμική εξίσωση δεν έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές.

Παρατήρηση: Για να εμφανίζονται οι μιγαδικές ρίζες σε ζεύγη συζυγών πρέπει η πολυωνυμική εξίσωση να έχει ΜΟΝΟ πραγματικούς συντελεστές.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ

(1) Απόδειξη τύπου n-οσής ρίζας κριτικής

$a = |a| \cdot e^{i\theta}$, θ ένα όρισμα του a .

Εάν $z^n = a$, τότε $z^n = \left(\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n} \right)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}} \right)^n = 1 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}} = e^{i \frac{2v\pi}{n}}$$

$v = 0, 1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow z = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \frac{2v\pi + \theta}{n}}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

(2) Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

$$\text{Εάν } \Delta < 0, \quad \text{ρίζες: } z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}.$$

Π.χ. $z^2 + z + 1 = 0, \quad \Delta = -3, \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

(3) Πολυωνυμικές εξισώσεις

$$P(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$\underline{a_j \in \mathbb{R}}, \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 1.$$

Πρόταση: Εάν $P(z_0) = 0$, τότε $P(\bar{z}_0) = 0$.

$$\underline{\text{Απόδειξη:}} \quad P(\bar{z}_0) = \sum_{j=0}^k a_j \bar{z}_0^j = \sum_{j=0}^k \overline{a_j z_0^j} =$$

$$= \overline{\sum_{j=0}^k a_j z_0^j} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0. \quad \square$$

Πρόσκληση: Εάν $P(z_0) = 0$, τότε z_0

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0})$$

είναι παράγοντας του P .

x. Να λυθεί η εξίσωση

$$P(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$$

εν μία ρίζα είναι το i .

$(z+i)(z-i) = z^2 + 1$ παράγοντας τον P

$$P(z) \left| \begin{array}{l} z^2 + 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\cancel{\pi}(z) = z^2 - z + 1 \rightarrow \text{Ρίζες: } \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ρίζες του $P(z)$: $\pm i, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3. ΤΡΙΓΩΝΟΜ. ΣΥΝΑΡΤ. - ΜΙΓΑΔ. ΛΟΓΑΡ.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Γνωρίζουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$



$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ορισμός 3.1. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ορίζουμε

όλες σχέδόν οι ιδιότητες των $\sin x, \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, με τα φέρονται
εως $\sin z, \cos z, z \in \mathbb{C}$.

$\pi \cdot x$. (α) Ταυτότητες

$$\rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\rightarrow \sin(2z) = 2 \sin z \cos z$$

$$\rightarrow \cos(2z) = 2 \cos^2 z - 1 \quad k \rightarrow \lambda \cdot \pi$$

$$\rightarrow \text{Τίποτα για } \cos(z \pm w), \sin(z \pm w) \dots$$

$$(b) \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

$$\cos(2k\pi + z) = \cos z, \quad \sin(2k\pi + z) = \sin z, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\pi \pm z) = -\cos z, \quad \sin(\pi \pm z) = \mp \sin z$$

$k \rightarrow \lambda \cdot \pi$

Τριγωνομ. εξισώσεις

Τις επιλύουμε με βάση τον ορισμό 15' ως
ιδιότητες της e^z , $z \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα α:

$$(α) \cos z = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff$$

$$e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i\pi} \cdot e^{-iz} = e^{i(\pi - z)} \iff$$

$$iz = i(\pi - z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = \pi - z + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$$(B) \quad \sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = \overline{e^{iz}} \Leftrightarrow iz = -iz + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$$(8) \quad \cos z = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4. \quad \text{Oziw}$$

$$w = e^{iz} \Rightarrow w + \frac{1}{w} = 4 \Leftrightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (w-2)^2 = 3 \Leftrightarrow w = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\bullet \quad e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})} \Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow \underline{z = 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ΣΧΟΛΙΟ!

Οι συναρτήσεις $\sin z$, $\cos z$ δεν

είναι κατά μέτρο φραγμένες σε όλο το \mathbb{C} !

Πράγματι, άρα,

$$|\sin(iy)| = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right| = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$|\cos(iy)| = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$$

Πρωτεύων κλάδος λογαριθμών

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Η f δεν είναι 1-1. Παρ' ότ' αυτά, είναι 1-1

εάν σινοπτο

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \right\}.$$

πράγματι. Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in A$
(δηλ. $y_1, y_2 \in (-\pi, \pi]$) με $e^{z_1} = e^{z_2}$.

Τότε, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid z_1 - z_2 = 2k\pi i \iff$

$$(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 2k\pi i \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 2k\pi. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\pi < y_1 \leq \pi \\ -\pi \leq -y_2 < \pi \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} -2\pi < y_1 - y_2 < 2\pi \implies$$

$$\Rightarrow -2\pi < 2k\pi < 2\pi \Rightarrow -1 < k < 1$$

$$\Rightarrow k=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \text{δηλ. } z_1 = z_2.$$

Άρα, η $f|_A : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι 1-1.

$$f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad ??$$

Εστω $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ κ' $\varphi = \text{Arg } w \in (-\pi, \pi]$.

Τότε, $w = |w|e^{i\varphi} = e^{\ln|w| + i\varphi} = \rho e^{i\varphi}$

$z = \ln|w| + i\varphi \in A$ (αφού $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Άρα, $f|_A : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 1-1, επιπλ.

\Rightarrow ορίζεται η $(f|_A)^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow A$ με

τίπο $(f|_A)^{-1}(w) = \ln|w| + i\text{Arg}w, \quad w \neq 0$

Η $(f|_A)^{-1}$ ονομάζεται πρωτεύων κλάδος

του μιγαδικού λογαριθμίου κ' συμβολίζεται

με Log. Δηλ.

$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} z \leq \pi\}$ κ'ε

$\text{Log} w = \ln|w| + i \text{Arg} w, \quad w \neq 0.$

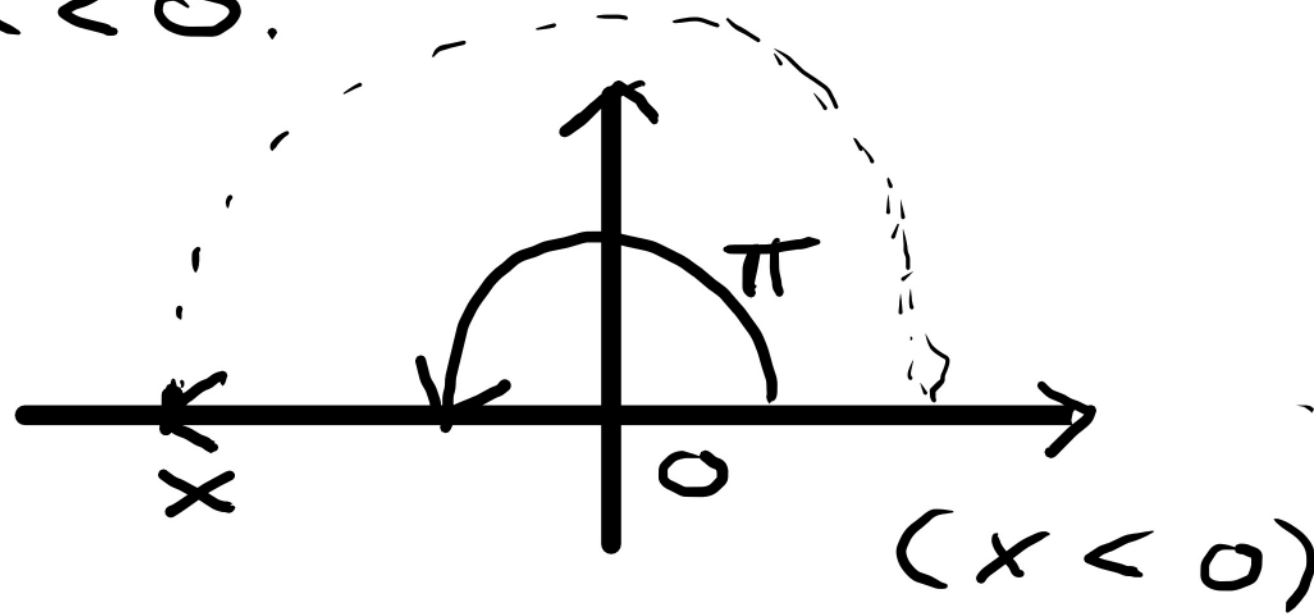
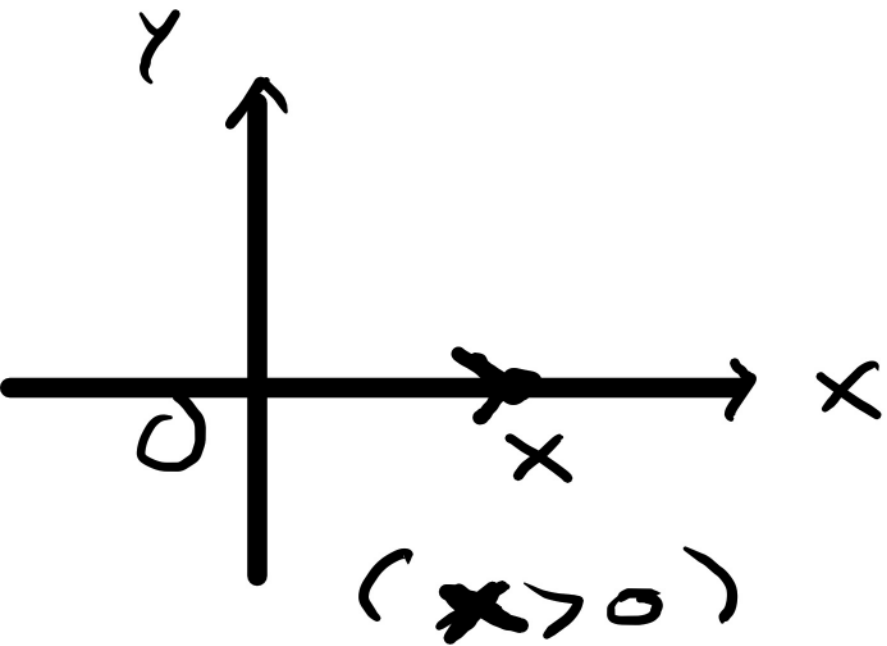
Παράδειγμα:

(α) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\text{Log } x = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln|x| + i\pi, & x < 0 \end{cases}$$

δύο $\text{Arg } x = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$

$$\forall x \cdot \text{Log}(-1) = i\pi$$

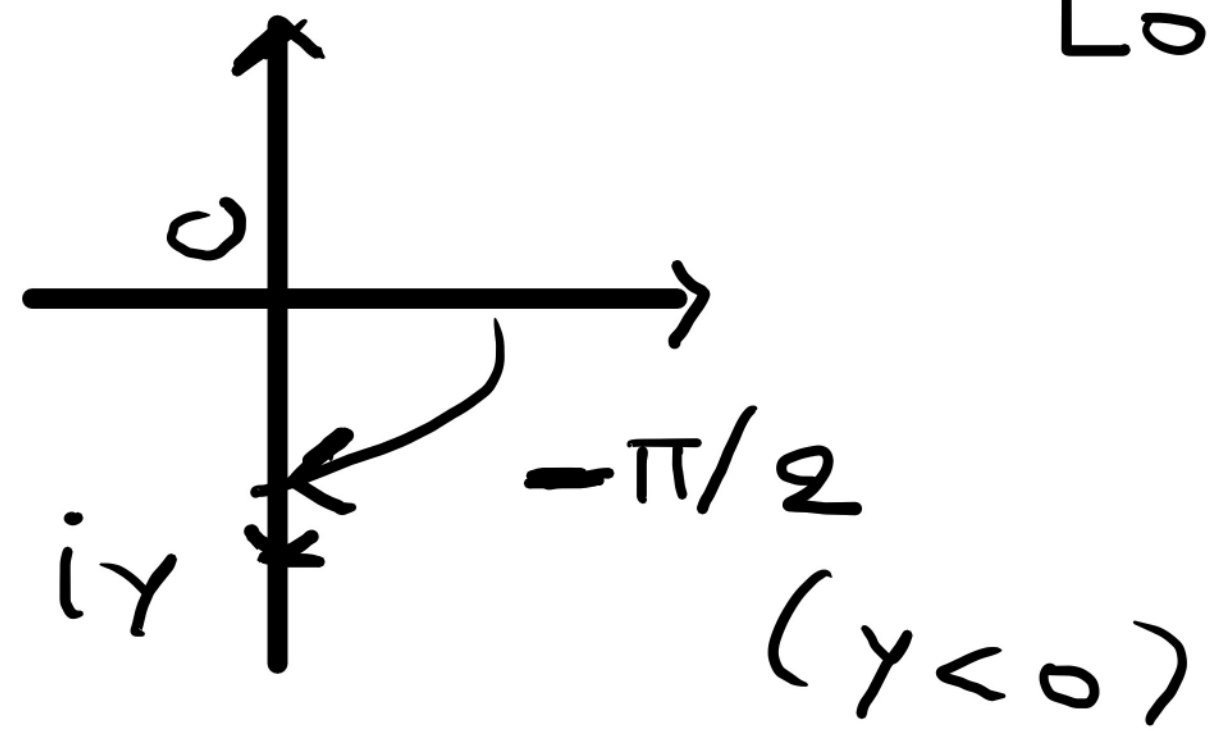
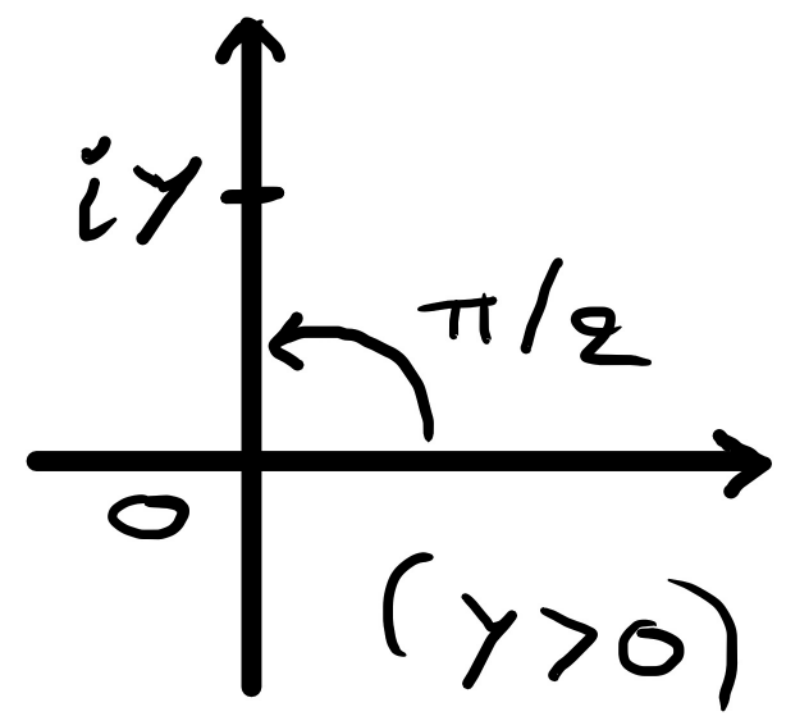


(β) Εάν $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\text{Log}(i\gamma) =$

$$= \begin{cases} \ln \gamma + i\pi/2, & \gamma > 0 \\ \ln |\gamma| - i\pi/2, & \gamma < 0. \end{cases}$$

$\pi \cdot x$

$$\text{Log } i = i\pi/2$$



$$(8) \operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)=?. \quad |\sqrt{3}+i|=2,$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i)=\pi/6 \text{ (since } \frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi])$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)=\ln 2+i\frac{\pi}{6}.$$

Σχόλιο: Δεν ισχύει πάντα η σχέση

$$\text{"Log}(e^z) = z \text{"}$$

π.χ. $\text{Log}(e^{\pi i}) = \text{Log} 1 = 0$

ισχύει μόνο για $z \in \mathbb{A}$ δηλ. $|\text{Im} z| \leq \pi$.

Αντίθετα, ισχύει $e^{\text{Log} w} = w, \quad \forall w \neq 0.$

επὶ πλάτος, $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ισχύει:

→ Αν $\text{Arg } w_1 + \text{Arg } w_2 \in (-\pi, \pi]$, τότε

$$\text{Log}(w_1 w_2) = \text{Log } w_1 + \text{Log } w_2.$$

→ Αν $\text{Arg } w_1 - \text{Arg } w_2 \in (-\pi, \pi]$, τότε

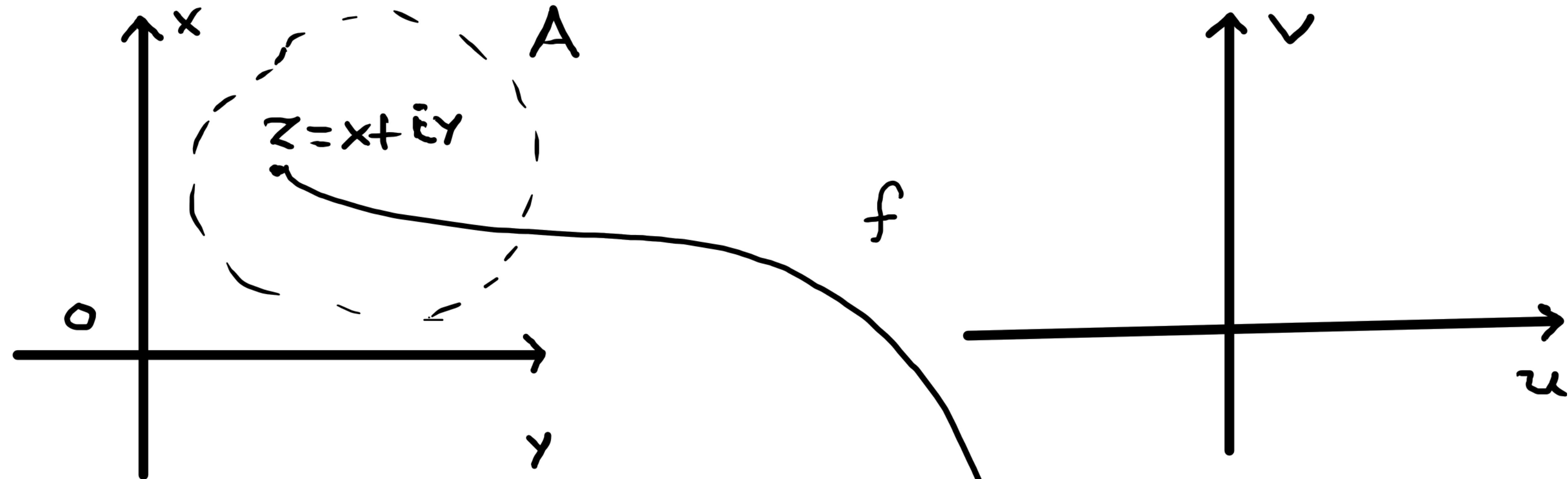
$$\text{Log}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \text{Log } w_1 - \text{Log } w_2.$$

4. ΜΙΓΑΔ. ΣΥΝΑΡΤ. - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός 4.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Συνάρτηση

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένας μηχανισμός που απεικονίζει κάθε $z \in A$, έναν κ' μοναδικό

$$w = f(z) \in \mathbb{C}.$$



$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Εάν $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση, ορίσονται
δύο συναρτήσεις $u, v: A \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[f(x + iy)], \quad v(x, y) = \operatorname{Im}[f(x + iy)]$$

$$\forall x + iy \in A.$$

Γράφουμε $u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f,$

$$f = u + iv.$$

#. x.

$$(a) f(z) = z^2. \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

$$(b) f(z) = e^z. \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$f(z) = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

$$(8) f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-|z|}}$$

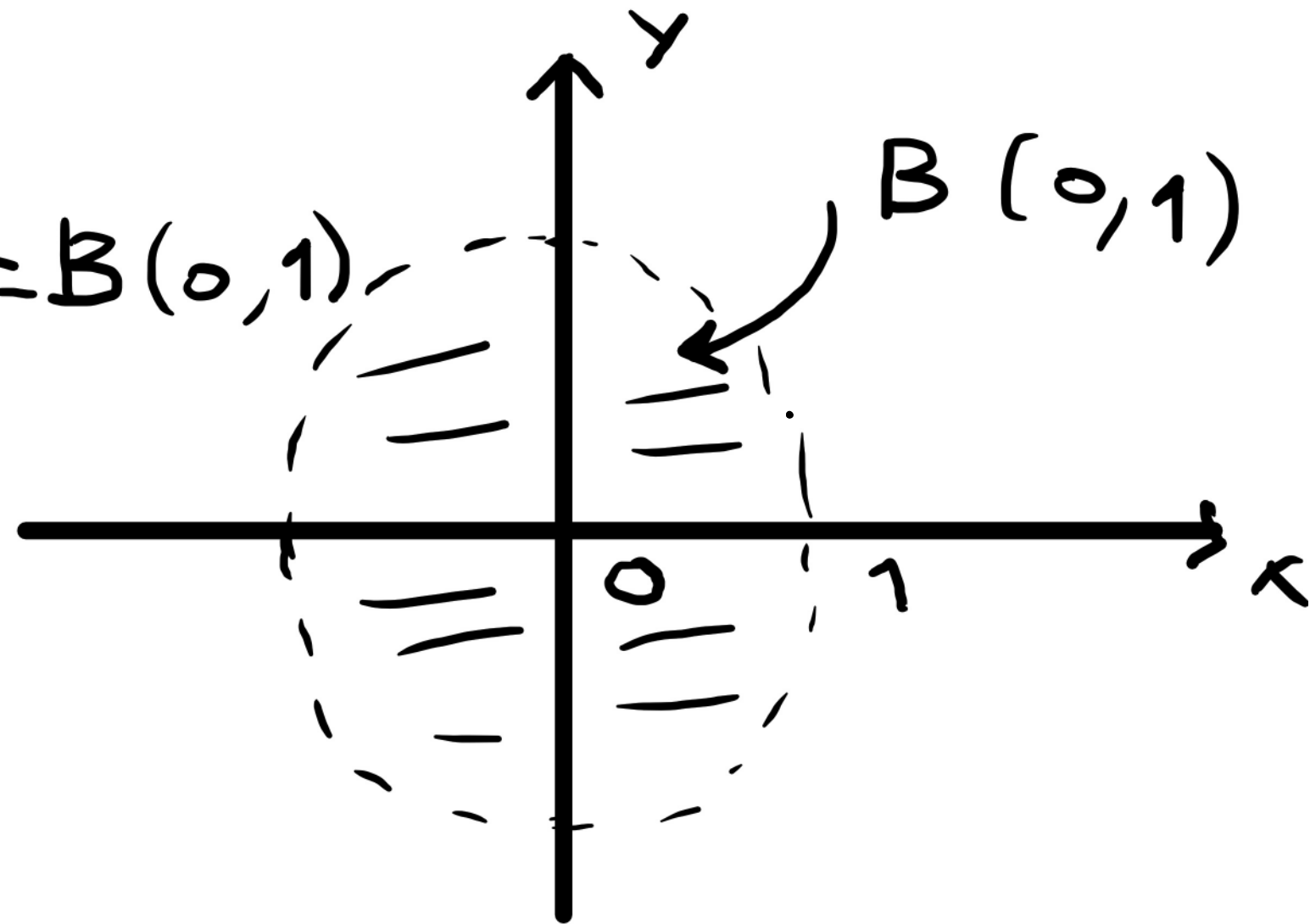
ΤΤΕ δ, ο ορισμός = ?

$$A_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = B(0, 1)$$

$$z = x + iy$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$v(x, y) = 0$$



Όριο στο z_0

Ορισμός 4.2. Έστω $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

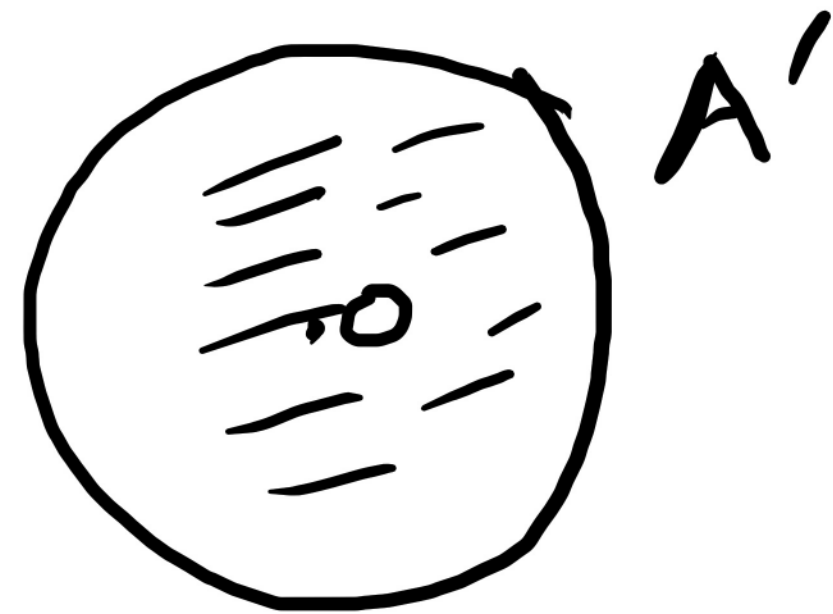
Το z_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης ^(σ.σ.) του A

αν $\forall r > 0$, $B(z_0, r) \cap (A \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$.

[$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ = ανοικτός δίσκος
κέντρου z_0 κ' ακτίνας r .]

$\pi \cdot x$. Είναι $A = B(0, 1)$, $z_0 \in \sigma \cdot \sigma \cdot \tau \cup A$
 Είναι $\circ B[0, 1] = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$.

$\Sigma \cup \mu \beta \omega \lambda$. $A' = \{ z_0 \in \sigma \cdot \sigma \cdot \tau \cup A \}$.



$\pi \cdot x$

$$z_n \rightarrow z_0$$

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Gradstein

$$A = \{z_1, z_2, \dots\}$$

$$A' = \{z_0\}$$

Ορισμός 4.3. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A'$.

Θα λέμε ότι $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ αν

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall z \in A \text{ με } 0 < |z - z_0| < \delta,$

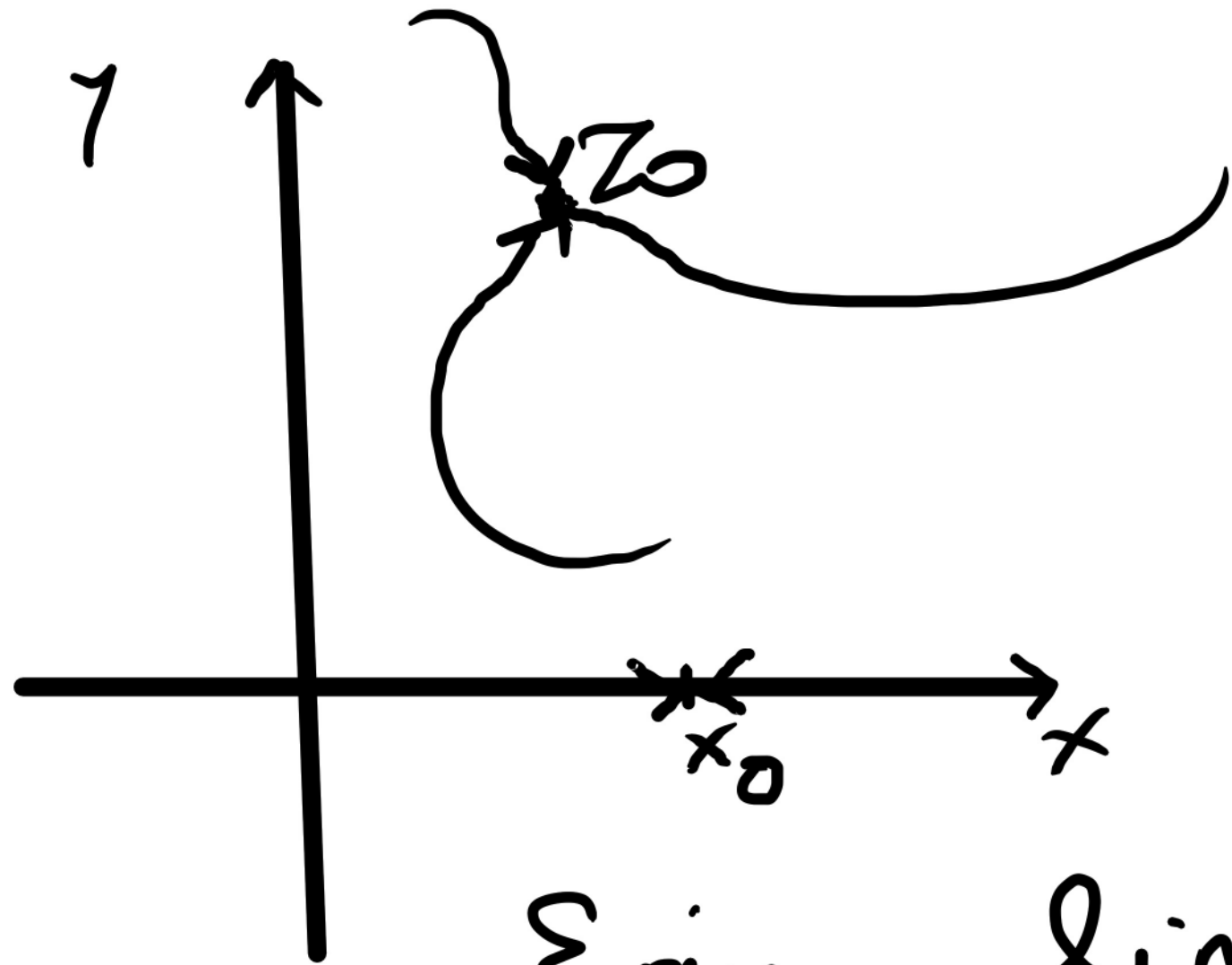
ισχύει $|f(z) - L| < \varepsilon.$

ΠΡΕΙ:

(α) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$

(β) \forall ακολουθία (z_n) με $z_n \neq z_0, z_n \rightarrow z_0,$

ισχύει $f(z_n) \rightarrow L.$



Υπάρχουν άπειρες
διαφορές κατά
μήκος των οποίων

$z_0 \quad z \rightarrow z_0$.

Εάν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$, τότε

$f(z) \rightarrow L$, καθώς $z \rightarrow z_0$ κατά κίνηση
εξαιτίας διαδοχικής!

Παράδειγμα: $\tau_0 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ δεν υπάρχει ΧΗ.

Πράγματι.

$$\rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in I}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z}{z} = -1$$

$I = \{ i\beta \mid \beta \in \mathbb{R} \}$

$$1 \neq -1$$

άρα το

όριο δεν

υπάρχει!

Πρόταση 4.4. Έστω $f = u + iv: A \rightarrow \mathbb{C}$,

$z_0 = x_0 + iy_0 \in A'$ κ' $L \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re} L \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im} L. \end{cases}$$

Ορισμός 4.5. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Η f

είναι συνεχής στο z_0 αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$\forall z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Πρόταση 4.6: Έστω $f = u + iv: A \rightarrow \mathbb{C}$,

$z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Τότε, f συνεχής στο z_0 αν

u, v συνεχής στο (x_0, y_0) .

π.x. $f(z) = e^z$, $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

u, v συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ συντεταγμένες στο \mathbb{C} .

Συνέχεια μιγαδικού λογαρίθμου.

Υπενθύμιση: Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$.

Η f είναι συνεχής στο $z_0 \in A$ ανν:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ώστε $\forall z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι η f **δεν** είναι συνεχής στο z_0 .

Τότε,

$\exists \varepsilon > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα:

$\forall \delta > 0, \exists z \in A$ με $|z - z_0| < \delta, |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$.

Τότε, $\forall n \geq 1, \exists z_n \in A$, ώστε

$$|z_n - z_0| < 1/n, \quad |f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Λήμμα: Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) f συνεχής στο z_0 .

(β) για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset A$ με $z_n \rightarrow z_0$, ισχύει $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

(γ) για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset A$ με $z_n \rightarrow z_0$, υπάρχει υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \rightarrow f(z_0)$.

Απόδειξη: [Μόνο το (γ) \Rightarrow (α).]

Υποθέτουμε ότι η f **δεν** είναι συνεχής στο z_0 . Τότε,

$\exists \varepsilon > 0$ και ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει η (1).

Έπεται ότι $z_n \rightarrow z_0$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \rightarrow f(z_0)$, **άτοπο!** [βλ. (1)].

□

Πρόταση: Το σύνολο σημείων συνέχειας της συνάρτησης $w \mapsto \text{Arg}(w)$ είναι το $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Απόδειξη: Έστω $w_0 \in A$ και $\varphi_0 = \text{Arg}(w_0)$.
Τότε, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$.

Θεωρούμε ακολουθία $(w_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $w_n \rightarrow w_0$.

Τότε και $|w_n| \rightarrow |w_0|$.

Θέτουμε $\varphi_n = \text{Arg}(w_n) \in (-\pi, \pi]$, $n \geq 1$.

Η πραγματική ακολουθία (φ_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει υπακολουθία (φ_{k_n}) που συγκλίνει.

Έστω $\lim \varphi_{k_n} = \theta \in [-\pi, \pi]$.

Τότε, $e^{i\varphi_{k_n}} \rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow w_{k_n} = |w_{k_n}|e^{i\varphi_{k_n}} \rightarrow |w_0|e^{i\theta}$.

Άρα, $w_0 = |w_0|e^{i\theta} \Rightarrow \theta - \varphi_0 = 2k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, έπεται ότι $\varphi_0 = \theta$.

Επομένως, $\text{Arg}(w_{k_n}) = \varphi_{k_n} \rightarrow \theta = \varphi_0 = \text{Arg}(w_0)$.

Από το παραπάνω λήμμα $[(\gamma) \Rightarrow (\alpha)]$ προκύπτει ότι η $w \mapsto \text{Arg}(w)$ είναι συνεχής στο w_0 .

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $w \mapsto \text{Arg}(w)$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in (-\infty, 0)$.

Πράγματι, έστω $x_0 \in (-\infty, 0)$. Θέτουμε

$$w_n = |x_0|e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = -\pi + 1/n, \quad n \geq 1.$$

Τότε, $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$, για $n > 1/2\pi$.

Έχουμε

$$w_n \rightarrow |x_0|e^{-i\pi} = -|x_0| = x_0,$$

ενώ

$$\text{Arg}(w_n) = \varphi_n \rightarrow -\pi \neq \pi = \text{Arg}(x_0).$$

Από το παραπάνω λήμμα $[(\alpha) \Rightarrow (\beta)]$ προκύπτει ότι η $w \mapsto \text{Arg}(w)$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .

□

Πόρισμα: Το σύνολο σημείων συνέχειας της συνάρτησης $w \mapsto \text{Log}w$ είναι το $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Απόδειξη: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της Log είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις

$$w \mapsto \ln |w|, \quad w \mapsto \text{Arg}(w), \quad w \neq 0$$

που είναι ταυτόχρονα συνεχείς μόνο στα σημεία του A .

□