06/03/2024

Ασκήσεις από σημειώσεις

① Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f \in \mathcal{H}(U)$.

(i) Αν η e^{f} είναι σταθερή, να δ.ο. $f =$ σταθερή.
(ii) Αν $f(z) \cdot f'(z) = 0$, $\forall z \in U$, να δ.ο. $f =$ σταθερή.

Απόδειξη:

(i) $g(z) = e^{f(z)}$, $z \in U$. $g =$ σταθερή

$\Rightarrow 0 = g'(z) = f'(z) e^{f(z)} \Rightarrow f'(z) = 0, \ \forall z \in U$

$\Rightarrow f =$ σταθερή στο U.

(ii) $g(z) = f(z)^2$, $z \in U \Rightarrow g'(z) = 2 f(z) f'(z) = 0, \ \forall z \in U$

$[g \in H(U) \xRightarrow{} U$ πεδίο$]$ $\quad g =$ σταθερή $= c \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow \quad f^2 = c$, στο U,

$\Longrightarrow \quad |f^2| = |c| \Rightarrow |f|^2 = |c| \Rightarrow |f| = \sqrt{|c|}$
$=$ σταθερή

$[f \in H(U) \xRightarrow{} U$ πεδίο$]$ $\quad f =$ σταθερή. $\quad \boxtimes$

<u>Σχόλιο</u>: Γενικότερα, αν $f^n =$ σταθερή $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$
τότε $f =$ σταθερή.

② Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f, g \in \mathcal{H}(U)$ ώστε

$$f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in U.$$

Να δ.ο. $\exists c \in \mathbb{R} \mid \quad f(z) = c + g(z), \quad \forall z \in U.$

Απόδειξη: $a \in \mathbb{C}$ $\quad a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{a} = a.$

$\forall z \in U,$

$$f(z) + \overline{g(z)} = \overline{f(z) + \overline{g(z)}}$$

$$= \overline{f(z)} + \overline{\overline{g(z)}} = \overline{f(z)} + g(z)$$

$$\Rightarrow f(z) - g(z) = \overline{f(z)} - \overline{g(z)} = \overline{f(z) - g(z)}.$$

Εάν $h = f - g$, τότε $h \in \mathcal{H}(U)$ κ' $h = \overline{h}$

$\Rightarrow h, \overline{h} \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow h =$ σταθερή $= c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \overline{c} = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}.$ ☒

(3) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f : U \to \mathbb{C}$ συνάρτηση, ώστε

$$f^3 \in \mathcal{H}(U), \qquad \bar{f}^2 \in \mathcal{H}(U).$$

Να δ.ο. $f =$ σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u> $f^6 = (f^3)^2 \in \mathcal{H}(U)$

$$\overline{f^6} = \bar{f}^6 = (\bar{f}^2)^3 \in \mathcal{H}(U)$$

$\Longrightarrow \quad f^6 = c =$ σταθερή $\in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow \quad |f^6| = |c| \Rightarrow |f|^6 = |c| \Rightarrow |f| = \sqrt[6]{|c|} = c_1 \geq 0$

$\forall z \in U, \quad |f(z)| = c_1$

$\Rightarrow \quad |f^3| = |f|^3 = c_1^3 \quad \overset{[f^3 \in \mathcal{H}(U)]}{\Longrightarrow} \quad \underline{f^3 = c_2 \in \mathbb{C}}$

ϛ' $|\bar{f}^2| = |\bar{f}|^2 = |f|^2 = c_1^2$

$[\bar{f}^2 \in H(U)]$

$\Longrightarrow$ $\bar{f}^2 =$ σταθερή $\Rightarrow$ $f^2 =$ σταθερή

$= c_3 \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} f^3 &= c_2 \\ f^2 &= c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \cdot f^2 = c_2$$

$$\Longrightarrow c_3 f = c_2$$

- Αν $c_3 = 0$, τότε $f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.
- Αν $c_3 \neq 0$, $f = c_2 / c_3 =$ σταθερή. $\boxtimes$

Ασκήσεις φυλλαδίου "ΑΣΚ. ΚΕΦ. 2,3"

Β9 Να βρείτε σε ποιά σημεία η $f(z) = \bar{z}\, e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη κ' να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

Απόδειξη: $\forall\, z = x + iy$, $f(z) = (x - iy)\, e^{-(x^2+y^2)}$

$$u(x,y) = x e^{-(x^2+y^2)}, \quad v(x,y) = -y e^{-(x^2+y^2)}$$

u, v διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$

f διαφορ. στο $z_0 \iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$

$$f(z) = \bar{z}\, e^{-z\bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = e^{-z\bar{z}} + \bar{z}\, e^{-z\bar{z}}(-z)$$
$$= e^{-|z|^2}(1 - |z|^2)$$

f διαφορ. στο z_0 $\iff$ $|z_0|^2 = 1$ $\iff$ $\boxed{|z_0| = 1}$

$$\left[\ \frac{\partial}{\partial w}\left(w e^{-zw}\right) = e^{-zw} + w e^{-zw}(-z) \right.$$

$$\left. w = \bar z \qquad \right]$$

Κ' $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. Αλλά $f(z) = \bar z e^{-z\bar z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \bar z e^{-z\bar z}(-\bar z) = -\bar z^2 e^{-|z|^2}$$

Για $|z_0| = 1$, $f'(z_0) = -\bar z_0^2 e^{-1} = -\bar z_0^2/e$

$$= -\frac{1}{e}\frac{1}{z_0^2}.$$

Σχόλιο: Αν $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Re} g$, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Im} g$ συνεχώς διαφορ. στο $\mathbb{R}^2$, τότε κ' $\mathrm{Re}(f \cdot g)$, $\mathrm{Im}(f \cdot g)$ συνεχώς διαφορ. στο $\mathbb{R}^2$.

Οπότε, στην προηγούμενη άσκηση, αντίστοιχα το Re, Im της $\bar{z} e^{-|z|^2}$ είναι συνεχώς διαφορ. στο $\mathbb{R}^2$.

Γενικά: $\mathcal{J} = \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f$ συνεχώς διαφορ. στο $\mathbb{R}^2 \}$. Τότε:

→ αν $f, g \in \mathcal{J}$, τότε $f \pm g$, $f \cdot g \in \mathcal{J}$

→ αν $f, g \in \mathcal{J}$, " $g \circ f \in \mathcal{J}$.

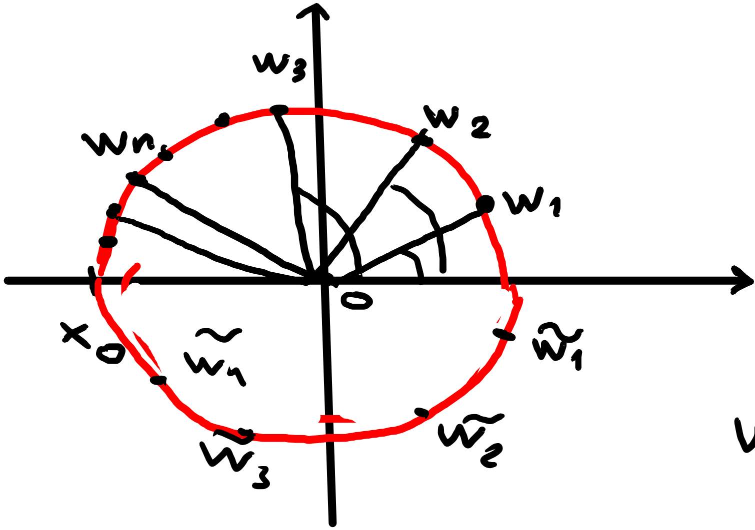
B 17 (α) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 < 0$. Να δ.ο. <u>δεν</u> υπάρχει το όριο $\lim_{w \to x_0} \operatorname{Log} w$.

<u>Απόδειξη</u>:

<u>Υπενθύμιση</u> [Αρχή Μεταφοράς]

$$\lim_{w \to w_0} \varphi(w) = L \Leftrightarrow [\forall \text{ ακολουθία } (w_n) \text{ με } w_n \to w_0$$

$$\text{κ' } w_n \neq w_0, \forall n, \text{ ισχύει } \varphi(w_n) \to L].$$



$w_n \to x_0, \quad w_n \neq x_0$

$|w_n| = |x_0|$

$\operatorname{Arg} w_n \to \pi$

$$w_n = |x_0| e^{i(\pi - \frac{1}{n})} \longrightarrow -|x_0| = x_0$$

$\forall n > \frac{1}{2\pi}$,

$$\operatorname{Arg} w_n = \pi - \frac{1}{n} \to \pi$$

$$\operatorname{Log} w_n = \ln|w_n| + i \operatorname{Arg} w_n$$

$$\to \ln|x_0| + i\pi$$

$$\tilde{w}_n = |x_0| e^{i\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n} -|x_0| = x_0$$

$\forall n > \frac{1}{2\pi}$, $\operatorname{Arg} \tilde{w}_n = -\pi + \frac{1}{n} \to -\pi$

$$\operatorname{Log} \tilde{w}_n \to \ln|x_0| - i\pi$$

Άρα, $w_n \to x_0$, $\tilde{w}_n \to x_0$, $w_n \neq x_0$, $\tilde{w}_n \neq x_0$, $\forall n$

ώ' $\lim\limits_{n} \operatorname{Log} w_n \neq \lim\limits_{n} \operatorname{Log}(\tilde{w}_n)$

$\Longrightarrow$ το $\lim\limits_{w \to x_0} \operatorname{Log} w$ δεν υπάρχει!

(β) Να δ.ο. $\nexists$ ολόμορφη συνάρτηση

$f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ώστε

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\Big[\quad \operatorname{Log} w = \underbrace{\ln|w|}_{u} + i \operatorname{Arg} w$$

$w = x + iy$, $\quad u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$\operatorname{Log} w$ ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

με $\operatorname{Re}(\operatorname{Log} w) = u \Big]$.

<u>Απόδ:</u>

Έστω ότι $\exists\, f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

με $f = u + iv$, $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Θέτω $g(w) = \operatorname{Log} w$, $w \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0] = U$

$g \in \mathcal{H}(U)$

$$\operatorname{Re}(f|_U) = \operatorname{Re}(g) \Rightarrow \operatorname{Re}(\underbrace{g - f|_U}_{\text{ολόμορφη}}) = 0$$

$$\Rightarrow g - f|_U = c \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \forall w \in U, \quad \operatorname{Log} w = f(w) + c$$

Εάν $x_0 < 0$, $\lim_{w \to x_0} f(w) = f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{w \to x_0} \mathrm{Log}\, w = f(x_0) + c$ (Άτοπο)

(βλ. σχημ. (α)).

x_0 σ. σ. του U