Μιγαδική Ανάλυση

Ασκήσεις

ΣΕΜΦΕ – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί και μιγαδικές συναρτήσεις

1.1. Υπολογίστε τους μιγαδικούς αριθμούς χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους τύπους του αντιστρόφου και της διαίρεσης:

$$z_1 = \frac{1}{3+4i}, \quad z_2 = \frac{2-3i}{-3+5i}.$$

Υπόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή και χρησιμοποιούμε την $z\overline{z} = |z|^2$. Έτσι, παίρνουμε

$$z_1 = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{|3+4i|^2} = \frac{3-4i}{25}$$

και

$$z_2 = \frac{2-3i}{-3+5i} = \frac{(2-3i)(-3-5i)}{|3+5i|^2} = -\frac{(2-3i)(3+5i)}{34} = -\frac{21+i}{34}.$$

1.2. Υπολογίστε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}, \quad z_2 = \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}.$$

Υπόδειξη. Οι απαντήσεις είναι: $z_1 = -\frac{2}{5}$ και $z_2 = -\frac{1}{2}$. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{25} + \frac{(2-i)(-i)}{5} = \frac{-5+10i}{25} + \frac{-1-2i}{5} \\ &= \frac{-1+2i}{5} + \frac{-1-2i}{5} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{5i(1+i)(2+i)(3+i)}{2\cdot 5\cdot 10} = \frac{(-5+5i)(5+5i)}{100} \\ &= \frac{25(-1+i)(1+i)}{100} = \frac{25\cdot(-2)}{100} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.3. Αποδείξτε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύουν οι

$$\text{(i)}\ \ |z\cdot w| = |z|\cdot|w|, \quad \text{(ii)}\ \ \overline{z}\cdot\overline{w} = \overline{z\cdot w}, \quad \text{(iii)}\ \ \overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \quad \text{(iv)}\ \ (\overline{z})^n = \overline{z^n}.$$

Υπόδειξη. Στα (i), (ii) και (iii) γράφουμε $z = a+bi$ και $w = c+di$ και εκτελούμε τις πράξεις. Για παράδειγμα, στο (i) έχουμε $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, άρα

$$|z \cdot w|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2,$$

και έπεται το ζητούμενο. Ομοίως, για το (ii) έχουμε

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z \cdot w}.$$

Το (iii) είναι πολύ απλούστερο. Για το (iv) εφαρμόζουμε το (ii) και επαγωγή στο n.

1.4. Αν p είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και ο $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του p τότε ο συζυγής $\overline{z_0}$ του z_0 είναι επίσης ρίζα του p.

Υπόδειξη. Γράφουμε $p(z) = a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0$, όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\begin{aligned} p(\overline{z_0}) &= a_n\overline{z_0}^n + \cdots + a_1\overline{z_0} + a_0 \\ &= a_n\overline{z_0^n} + \cdots + a_1\overline{z_0} + a_0 \\ &= \overline{a_nz_0^n} + \cdots + \overline{a_1z_0} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_nz_0^n + \cdots + a_nz_0 + a_0} \\ &= \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

(Ισχύει $\overline{a_i} = a_i$ επειδή $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$.)

1.5. Ποιές είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|z| = z$; Ποιες είναι οι λύσεις της $|z| = iz$;

Υπόδειξη. Αν $z = x + iy$ τότε $|z| = z$ αν και μόνο αν $\sqrt{x^2 + y^2} = x + iy$. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $y = 0$ και $|x| = \sqrt{x^2} = x$, δηλαδή $x \geqslant 0$. Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης $|z| = z$ είναι οι $z = x \in \mathbb{R}$ με $x \geqslant 0$.

Ομοίως, $|z| = iz$ αν και μόνο αν $\sqrt{x^2 + y^2} = -y + ix$. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $x = 0$ και $|y| = \sqrt{y^2} = -y$, δηλαδή $y \leqslant 0$. Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης $|z| = iz$ είναι οι $z = iy$ με $y \leqslant 0$.

1.6. Λύστε την εξίσωση $z^2+z+1 = 0$, ανάγοντάς την σε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο πραγματικούς αγνώστους.

Υπόδειξη. Αν γράψουμε $z = x+iy$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση παίρνει τη μορφή $(x^2-y^2)+2xyi+x+yi+1 = 0$, δηλαδή ζητάμε τις λύσεις του συστήματος εξισώσεων $x^2 + x + 1 - y^2 = 0$ και $(2x + 1)y = 0$. Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $y = 0$ και $x^2 + x + 1 = 0$, που δεν έχει λύση αφού $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $x = -\frac{1}{2}$ και $y^2 = \frac{3}{4}$, που δίνει δύο λύσεις $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Συνεπώς, η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τους $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.7. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, αποδείξτε ότι $|\mathrm{Im}(1 - \overline{z} + z^2)| < 2$.

Υπόδειξη. Ισχύει ότι $\mathrm{Im}(1 - \overline{z} + z^2) = \mathrm{Im}1 + \mathrm{Im}(-\overline{z}) + \mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(-\overline{z}) + \mathrm{Im}(z^2)$. Εφόσον $|z^2| = |z|^2 < 1$ και $|-\overline{z}| = |\overline{z}| = |z| < 1$, οι μιγαδικοί αριθμοί z^2 και $-\overline{z}$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου δίσκου. Άρα, τα φανταστικά τους μέρη ανήκουν στο ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$ και συνεπώς το άθροισμα αυτών ανήκει στο $(-2, 2)$.

1.8. Ποια είναι η μέγιστη τιμή και ποια η ελάχιστη τιμή του $|z^4 - 4z^2 + 3|$ όταν $|z| = 2$; Όταν $|z| \leqslant 2$;

Υπόδειξη. Γράφουμε αρχικά $z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2 - 1)(z^2 - 3)$, άρα $|z^4 - 4z^2 + 3| = |z^2 - 1||z^2 - 3|$. Παρατηρούμε ότι αν $|z| \leqslant 2$ τότε

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \leqslant (|z|^2 + 1)(|z|^2 + 3) \leqslant 5 \cdot 7 = 35,$$

και η ανισότητα είναι γνήσια αν $|z| < 2$. Επίσης, για $z = \pm 2i$ έχουμε ισότητα στην $|z^4 - 4z^2 + 3| = 35$, άρα αυτή είναι η μέγιστη τιμή τόσο στον κύκλο $|z| = 2$ όσο και στον δίσκο $|z| \leqslant 2$. Για να δείξουμε ότι τα $z = \pm 2i$ είναι τα μοναδικά σημεία στα οποία πιάνεται το μέγιστο, παρατηρούμε ότι αν $z = x + iy$, $|z| = 2$

και $|z^4 - 4z^2 + 3| = 35$ τότε, αναγκαστικά, $|z^2 - 1| = 5$ και $|z^2 - 3| = 7$. Άρα, πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 25, \quad (x^2 - y^2 - 3)^2 + 4x^2y^2 = 49.$$

Αντικαθιστώντας $y^2 = 4 - x^2$ στη δεύτερη ή στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε $x = 0$. Άρα $y = \pm 2$ και έχουμε το ζητούμενο.

Για το ελάχιστο χρησιμοποιούμε τις $|z^2 - 1| \geqslant |z|^2 - 1$ και $|z^2 - 3| \geqslant |z|^2 - 3$, και έχουμε ότι αν $|z| = 2$ τότε

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \geqslant (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 3) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Επίσης, για $z = \pm 2$ έχουμε ισότητα. Αντίστροφα, αν $z = x+iy$, $|z| = 2$ και $|z^4-4z^2+3| = 3$ τότε, αναγκαστικά, $|z^2 - 1| = 3$ και $|z^2 - 3| = 1$. Άρα, πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 9, \quad (x^2 - y^2 - 3)^2 + 4x^2y^2 = 1.$$

Αντικαθιστώντας $x^2 = 4 - y^2$ στη δεύτερη ή στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε $y = 0$. Άρα $x = \pm 2$ και έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν $|z| \leqslant 2$ τότε προφανώς $|z^4 - 4z^2 + 3| \geqslant 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $z^4 - 4z^2 + 3 = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $z^2 = 1$ ή $z^2 = 3$, απ' όπου παίρνουμε τέσσερα σημεία ελαχίστου: ± 1 και $\pm\sqrt{3}$.

1.9. Αποδείξτε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z \pm w|^2 \leqslant (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $|z \pm w| \leqslant |z| + |w|$, άρα $|z \pm w|^2 \leqslant (|z| + |w|)^2 = |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2$. Συνεπώς, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$|z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 \leqslant 1 + |z|^2 + |w|^2 + |z|^2|w|^2.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1 - 2|z|\,|w| + |z|^2|w|^2 \geqslant 0$, δηλαδή την $(1 - |z|\,|w|)^2 \geqslant 0$ η οποία προφανώς ισχύει.

1.10. (i) Αποδείξτε ότι $|z - w| = |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.

(ii) Αποδείξτε ότι $|z - w| < |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|, |w| < 1$ ή $|z|, |w| > 1$.

Υπόδειξη. (i) Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέτρα και έχουμε

$$|z - w| = |1 - \overline{w}z| \iff |z - w|^2 = |1 - \overline{w}z|^2 \iff |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2|z|^2,$$

δηλαδή

$$(1 - |z|^2)(1 - |w|^2) = 0.$$

Άρα, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν είτε $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.

(ii) Ομοίως, υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέτρα και έχουμε

$$|z - w| < |1 - \overline{w}z| \iff |z - w|^2 < |1 - \overline{w}z|^2 \iff |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2 < 1 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}z) + |w|^2|z|^2,$$

δηλαδή

$$(1 - |z|^2)(1 - |w|^2) > 0.$$

Άρα, η ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι δύο όροι του γινομένου είναι ταυτόχρονα θετικοί ή αρνητικοί, δηλαδή αν $|z| < 1$ και $|w| < 1$ ή $|z| > 1$ και $|w| > 1$.

1.11. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - i| < 1\} \quad \text{και} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0, |z - i| > 1\}.$$

Υπόδειξη. Να κάνετε τα σχήματα. Το A είναι η τομή των ανοικτών δίσκων $D(0,1)$ και $D(i,1)$. Το B είναι το μέρος του ανοικτού δίσκου $D(0,1)$ που βρίσκεται έξω από τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(i,1)$ και μέσα στο ανοικτό άνω ημιεπίπεδο.

1.12. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα των z που ικανοποιούν καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$z+\overline{z}=1,\quad i(z-\overline{z})\leqslant 2,\quad 2i(\overline{z}-z)+|z|^2+1\leqslant 0$$

και

$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}=-2,\quad \mathrm{Re}((1-i)z)\geqslant 1,\quad |z|+\mathrm{Re}(z)\leqslant 1.$$

Υπόδειξη. Το σύνολο $z+\overline{z}=1$ είναι η ευθεία με εξίσωση $x=\frac{1}{2}$. Πράγματι, έχουμε $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$, άρα $z+\overline{z}=1$ αν και μόνο αν $x=\frac{1}{2}$.

Το σύνολο $i(z-\overline{z})\leqslant 2$ είναι το κλειστό ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=-1$. Πράγματι, έχουμε $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)=2iy$, άρα $i(z-\overline{z})\leqslant 2$ αν και μόνο αν $-2y\leqslant 2$, δηλαδή $y\geqslant -1$.

Το σύνολο $2i(\overline{z}-z)+|z|^2+1\leqslant 0$ είναι ο κλειστός δίσκος με κέντρο $(0,-2)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$. Πράγματι,

$$2i(\overline{z}-z)+|z|^2+1=(x^2+y^2)+4y+1=x^2+(y-2)^2-3,$$

άρα $2i(\overline{z}-z)+|z|^2+1\leqslant 0$ αν και μόνο αν $x^2+(y-2)^2\leqslant 3$, δηλαδή $|z-(-2i)|\leqslant \sqrt{3}$.

Το σύνολο $(2-i)z+(2+i)\overline{z}=-2$ είναι η ευθεία με εξίσωση $2x+y=-1$. Πράγματι,

$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}=2(z+\overline{z})-i(z-\overline{z})=4x+2y,$$

άρα $(2-i)z+(2+i)\overline{z}=-2$ αν και μόνο αν $4x+2y=-2$, δηλαδή $2x+y=-1$.

Το σύνολο $\mathrm{Re}((1-i)z)\geqslant 1$ είναι το κλειστό ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $x+y=1$. Πράγματι, $(1-i)z=(1-i)(x+iy)=x+y+i(y-x)$, άρα $\mathrm{Re}((1-i)z)=x+y$. Συνεπώς, $\mathrm{Re}((1-i)z)\geqslant 1$ αν και μόνο αν $x+y\geqslant 1$.

Το σύνολο $|z|+\mathrm{Re}(z)\leqslant 1$ είναι το σύνολο των σημείων (x,y) που βρίσκονται είτε πάνω στην παραβολή με εξίσωση $x=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}$ είτε δεξιά της. Πράγματι,

$$|z|+\mathrm{Re}(z)\leqslant 1 \iff \sqrt{x^2+y^2}+x\leqslant 1,$$

η οποία ισχύει αν και μόνο αν $x\leqslant 1$ και $x^2+y^2\leqslant 1-2x+x^2$. Αυτό το ζεύγος ανισοτήτων είναι ισοδύναμο με την $2x\leqslant 1-y^2$.

1.13. Έστω $z\in\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι:

(i) $|z|=1$ αν και μόνο αν $\overline{z}=\frac{1}{z}$.

(ii) Αν $z\neq -1$ και $|z|=1$ τότε $\frac{z-1}{z+1}\in\mathbb{I}$.

Υπόδειξη. (i) Αν $|z|=1$ τότε $z\overline{z}=|z|^2=1$, άρα $z\neq 0$ και $\overline{z}=\frac{1}{z}$. Αντίστροφα, αν $\overline{z}=\frac{1}{z}$ τότε $z\neq 0$ και $z\overline{z}=1$, δηλαδή $|z|^2=1$, απ' όπου έπεται ότι $|z|=1$.

(ii) Χρησιμοποιώντας την $2\mathrm{Re}(w)=w+\overline{w}$ για τον $w=\frac{z-1}{z+1}$, και το γεγονός ότι $\overline{z}=1/z$ από το (i), παίρνουμε

$$2\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{z-1}{z+1}+\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\frac{z-1}{z+1}+\frac{1/z-1}{1/z+1}=\frac{z-1}{z+1}+\frac{1-z}{1+z}=\frac{z-1}{z+1}-\frac{z-1}{z+1}=0.$$

Αυτό δείχνει ότι $\frac{z-1}{z+1}\in\mathbb{I}$.

1.14. Αποδείξτε ότι για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$ ισχύει

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$

και δώστε τη γεωμετρική σημασία αυτής της ισότητας.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{z} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + w\overline{z} + \overline{z}w + |w|^2$$

και

$$|z-w|^2 = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = z\overline{z} - w\overline{z} - \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 - w\overline{z} - \overline{z}w + |w|^2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο.

Η ισότητα αυτή εκφράζει την γνωστή πρόταση ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών.

1.15. Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ και $|z+w| = |z| = |w|$ να αποδείξετε ότι $|z-w| = \sqrt{3}|z|$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha = |z+w| = |z| = |w|$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2),$$

δηλαδή

$$\alpha^2 + |z-w|^2 = 4\alpha^2.$$

Έπεται ότι $|z-w| = \sqrt{3}\alpha = \sqrt{3}|z|$.

1.16. Αν $|z-1| \leqslant 1$ και $|z-2| = 1$ να αποδείξετε ότι $1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{3}$.

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$2 = |(z-2) - z| \leqslant |z-2| + |z| = 1 + |z|,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $1 \leqslant |z|$. Για την άλλη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$1 = |z-2|^2 = |z|^2 - 4\mathrm{Re}(z) + 4,$$

δηλαδή $2\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(|z|^2 + 3)$, και στη συνέχεια βλέπουμε ότι

$$1 \geqslant |z-1|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1 = |z|^2 - \frac{|z|^2+3}{2} + 1 = \frac{|z|^2-1}{2},$$

απ' όπου έπεται ότι $|z|^2 \leqslant 3$, δηλαδή $|z| \leqslant \sqrt{3}$.

1.17. Να περιγράψετε τους γεωμετρικούς τόπους:

(i) $|z-3+4i| = |z-1|$.

(ii) $|z-i| \leqslant 1$.

(iii) $\mathrm{Re}(\overline{z}+i) \leqslant 2$.

(iv) $|z-2| = 2|z+1|$.

(v) $|1-z| + |i+z| = 4$.

(vi) $|z-2+i| - |z+1| = 10$.

Υπόδειξη. (i) Τα σημεία που ισαπέχουν από τα $A = (3,-4)$ και $B = (1,0)$, δηλαδή η μεσοκάθετος του AB.

(ii) Τα σημεία που απέχουν από το $A = (0,1)$ απόσταση μικρότερη ή ίση από 1, δηλαδή ο κλειστός δίσκος με κέντρο το A και ακτίνα 1.

(iii) Αν $z = x+iy$ τότε $\overline{z}+i = x+i(1-y)$. Άρα, $\mathrm{Re}(\overline{z}+i) \leqslant 2$ αν και μόνο αν $x \leqslant 2$. Τα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη σχηματίζουν το ημιεπίπεδο $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 2\}$.

(iv) Έχουμε $|z-2| = 2|z+1|$ αν και μόνο αν $|z-2|^2 = 4|z+1|^2$ ή ισοδύναμα

$$|z|^2 - 4\mathrm{Re}(z) + 4 = 4|z|^2 + 8\mathrm{Re}(z) + 4 \iff |z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) = 0 \iff |z+2|^2 = 2^2.$$

Αυτά είναι τα σημεία που απέχουν από το $A = (-2,0)$ απόσταση ίση με 2, δηλαδή ο κύκλος με κέντρο το A και ακτίνα 2.

(v) Τα σημεία του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα $A = (1,0)$ και $B = (0,-1)$ είναι ίσο με 4. Έλλειψη με εστίες τα A και B.

(vi) Τα σημεία του επιπέδου που η διαφορά των αποστάσεών τους από τα $A = (2,-1)$ και $B = (-1,0)$ είναι ίση με 10. Ο ένας κλάδος της υπερβολής με εστίες τα A και B.

1.18. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί ανά δύο και οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι

$$\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αφού οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά σημεία, τα διανύσματα $z_3 - z_1$ και $z_2 - z_1$ είναι παράλληλα, συνεπώς υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$. Αφού $z_1 \neq z_2$ έχουμε $z_2 - z_1 \neq 0$, άρα

$$\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει και το αντίστροφο (εξηγήστε γιατί).

1.19. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(z+1)^2 + (z-1)^2 = 0 \quad \text{και} \quad z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη εξίσωση γράφουμε

$$(z+1)^2 + (z-1)^2 = (z+1)^2 - [i(z-1)]^2 = (z+1+i(z-1))(z+1-i(z-1)).$$

Συνεπώς, $(z+1)^2 + (z-1)^2 = 0$ αν και μόνο αν $z+1+i(z-1) = 0$ ή $z+1-i(z-1) = 0$, απ' όπου παίρνουμε τις δύο λύσεις

$$z_1 = \frac{-1+i}{1+i} \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{1+i}{1-i}.$$

Για τη δεύτερη εξίσωση υπολογίζουμε τη διακρίνουσα

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3+i) = -3 - 4i = -4 - 4i + 1 = (2i)^2 - 4i + 1 = (2i-1)^2,$$

άρα έχουμε τις δύο λύσεις

$$z_1 = \frac{3 + 2i - 1}{2} = 1 + i \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i.$$

1.20. (i) Αν $z \in \mathbb{C}$ και $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$, όπου $\mathbb{I}$ είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

(ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{I}$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $w = \frac{z-i}{z+i}$.

(i) Αν $w \in \mathbb{R}$ τότε $\overline{w} = w$, δηλαδή

$$\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{z-i}{z+i} \implies |z|^2 + i(z+\overline{z}) - 1 = |z|^2 - i(z+\overline{z}) - 1 \implies z + \overline{z} = 0.$$

Ισοδύναμα έχουμε $\mathrm{Re}(z) = 0$, δηλαδή $z \in \mathbb{I}$.

(ii) Έχουμε $w = \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{I}$ αν και μόνο αν $\overline{w} = -w$. Γράφουμε

$$\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = -\frac{z-i}{z+i} \iff |z|^2 + i(z+\overline{z}) - 1 = -|z|^2 + i(z+\overline{z}) + 1 \iff 2|z|^2 = 2.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

1.21. Περιγράψτε το χωρίο $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > |z-1|\}$.

Υπόδειξη. Η ανισότητα $|z+i| > |z-1|$ γράφεται ισοδύναμα $|z+i|^2 > |z-1|^2$, δηλαδή

$$(z+i)(\overline{z}-i) > (z-1)(\overline{z}-1) \iff |z|^2 - 2\mathrm{Re}(iz) + 1 > |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1,$$

η οποία για $z = x+iy$ παίρνει τη μορφή

$$2y > -2x \iff y > -x.$$

Άρα, το χωρίο Ω είναι το ημιεπίπεδο πάνω από την ευθεία $y = -x$.

1.22. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$. Αποδείξτε ότι η καμπύλη $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = a|z - z_2|\}$ είναι ο κύκλος $|z - z_0| = R$ με κέντρο $z_0 = \frac{z_1 - a^2 z_2}{1-a^2}$ και ακτίνα $R = \frac{a}{|1-a^2|}|z_1 - z_2|$.

Υπόδειξη. Γράφουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
|z-z_1| = a|z-z_2| &\iff |z-z_1|^2 = a^2|z-z_2|^2 \\
&\iff |z|^2 + |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z_1}) = a^2(|z|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z_2})) \\
&\iff |z|^2(1-a^2) - 2\mathrm{Re}(z(\overline{z_1} - a^2\overline{z_2})) = a^2|z_2|^2 - |z_1|^2 \\
&\iff |z|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z\overline{\frac{z_1 - a^2 z_2}{1-a^2}}\right) = \frac{a^2|z_2|^2 - |z_1|^2}{1-a^2} \\
&\iff \left|z - \frac{z_1 - a^2 z_2}{1-a^2}\right|^2 - \frac{|z_1 - a^2 z_2|^2}{(1-a^2)^2} = \frac{a^2|z_2|^2 - |z_1|^2}{1-a^2} \\
&\iff \left|z - \frac{z_1 - a^2 z_2}{1-a^2}\right|^2 = R^2,
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{|z_1 - a^2 z_2|^2}{(1-a^2)^2} + \frac{a^2|z_2|^2 - |z_1|^2}{1-a^2} \\
&= \frac{1}{(1-a^2)^2}\left(|z_1 - a^2 z_2|^2 + (a^2|z_2|^2 - |z_1|^2)(1-a^2)\right) \\
&= \frac{1}{(1-a^2)^2}(|z_1|^2 + a^4|z_2|^2 - 2a^2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + a^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - a^4|z_2|^2 + a^2|z_1|^2) \\
&= \frac{1}{(1-a^2)^2}a^2(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})) \\
&= \frac{1}{(1-a^2)^2}a^2|z_1 - z_2|^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή $R = \frac{a}{|1-a^2|}|z_1 - z_2|$.

1.23. Βρείτε τα ορίσματα και το πρωτεύον όρισμα καθενός από τους

$$\pm(\sqrt{3} \pm i), \quad \pm(1 \pm i\sqrt{3}), \quad \pm(1 \pm i).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε διαδοχικά:

(α΄) $z = \sqrt{3} + i = 2e^{\pi i/6}$, $\quad \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{6}$, $\quad \arg z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(β΄) $z = \sqrt{3} - i = 2e^{-\pi i/6}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{6}$, $\arg z = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(γ΄) $z = -\sqrt{3} - i = 2e^{-5\pi i/6}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{5\pi}{6}$, $\arg z = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(δ΄) $z = -\sqrt{3} + i = 2e^{5\pi i/6}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{6}$, $\arg z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ε΄) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\pi i/3}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}$, $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ϛ΄) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\pi i/3}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}$, $\arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ζ΄) $z = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-2\pi i/3}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{2\pi}{3}$, $\arg z = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(η΄) $z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2\pi i/3}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{2\pi}{3}$, $\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(θ΄) $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$, $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ι΄) $z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ια΄) $z = -1 - i = \sqrt{2}e^{-3\pi i/4}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$, $\arg z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ιβ΄) $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}$, $\arg z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.24. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σημεία z για τα οποία: (α) $\arg(z^2) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (β) $\arg(z^3) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (γ) $\arg(z^4) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Αν $z = re^{i\theta}$ τότε $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$, άρα $\arg(z^2) = \pi + 2k\pi$ αν $2\theta = \pi + 2k\pi$, δηλαδή $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα σημεία του φανταστικού άξονα εκτός από το $(0, 0)$.

Όμοια, αν $z = re^{i\theta}$ τότε $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$, άρα $\arg(z^3) = \pi + 2k\pi$ αν $3\theta = \pi + 2k\pi$, δηλαδή $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Τρεις ημιευθείες που σχηματίζουν γωνίες $\frac{\pi}{3}$, π και $-\frac{\pi}{3}$ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα.

Αν $z = re^{i\theta}$ τότε $z^4 = r^2 e^{i4\theta}$, άρα $\arg(z^4) = \pi + 2k\pi$ αν $4\theta = \pi + 2k\pi$, δηλαδή $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Τέσσερις ημιευθείες που σχηματίζουν γωνίες $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ και $-\frac{3\pi}{4}$ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα.

1.25. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς

$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6, \quad w_2 = \frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3} + i)^6}, \qquad w_3 = (-1 + i)^7$$

Υπόδειξη. Οι απαντήσεις έχουν ως εξής:

$$w_1 = -64, \qquad w_2 = -4, \qquad w_3 = -8 - 8i.$$

Όταν έχουμε να βρούμε μια δύναμη με μεγάλο εκθέτη, είναι καλύτερα να φέρουμε τη βάση της δύναμης σε πολική μορφή και μετά να εφαρμόσουμε τον τύπο de Moivre. Εδώ έχουμε

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}, \qquad \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}, \qquad 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i},$$

άρα

$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^6 = 2^6 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i \cdot 6} = 64 \cdot e^{-\pi i} = 64 \cdot (-1) = -64.$$

Για τον w_2 υπολογίζουμε πρώτα τους $(1 + i)^{16} = (\sqrt{2}e^{\pi i/4})^{16} = 256e^{4\pi i} = 256$ και $(\sqrt{3} + i)^6 = (2e^{\pi i/6})^6 = 64e^{\pi i} = -64$, άρα

$$w_2 = \frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3} + i)^6} = \frac{-256}{64} = -4.$$

Τέλος,

$$w_3 = (-1 + i)^7 = (\sqrt{2}e^{3\pi i/4})^7 = 8\sqrt{2}e^{21\pi i/4} = 8\sqrt{2}e^{-3\pi i/4} = 8(-1 - i) = -8 - 8i.$$

1.26. Υπολογίστε τις δυνάμεις $(1 + i)^{15}$, $(1 + i)^{20}$ και $(1 - i)^{13}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε μια πολική αναπαράσταση των $1+i$ και $1-i$. Έχουμε $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, άρα

$$(1+i)^{15} = 2^7\sqrt{2}e^{15\pi i/4} = 2^7\sqrt{2}e^{-\pi i/4} = 2^7\sqrt{2}\frac{1-i}{\sqrt{2}} = 2^7(1-i) = 128(1-i)$$

και

$$(1+i)^{20} = 2^{10}e^{20\pi i/4} = 2^{10}e^{\pi i} = 2^{10}(-1) = -1024.$$

Ομοίως, έχουμε $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, άρα

$$(1-i)^{13} = 2^6\sqrt{2}e^{-13\pi i/4} = 2^6\sqrt{2}e^{3\pi i/4} = 2^6\sqrt{2}\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = 2^6(-1+i) = -64(1-i).$$

1.27. Έστω $z = 1+i$. Υπολογίστε τον μιγαδικό αριθμό z^8 καθώς και το μέτρο και το κύριο όρισμα του μιγαδικού αριθμού z^{2019}.

Υπόδειξη. Γράφουμε $z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Τότε, $z^8 = 16e^{i2\pi} = 16$ και

$$z^{2019} = 2^{\frac{2019}{2}}e^{\frac{i\pi 2019}{4}} = 2^{\frac{2019}{2}}e^{\frac{i\pi 3}{4}} = 2^{\frac{2019}{2}}\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = 2^{1009}(-1+i).$$

1.28. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο de Moivre γράφουμε

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n = \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta} = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}.$$

Για την τελευταία ισότητα υποθέτουμε ότι $\cos n\theta \neq 0$.

1.29. Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική ταυτότητα $z^{n+1}-1 = (z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^n)$ να βρείτε τύπους για τα αθροίσματα

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos(2\theta) + \cdots + r^n\cos(n\theta) \quad \text{και} \quad r\sin\theta + r^2\sin(2\theta) + \cdots + r^n\sin(n\theta),$$

όπου $r \geqslant 0$.

Υπόδειξη. Θέτοντας $z = re^{i\theta}$ στην ταυτότητα $z^{n+1}-1 = (z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^n)$ έχουμε

$$r^{n+1}e^{i(n+1)\theta} - 1 = (re^{i\theta}-1)(1+re^{i\theta}+r^2e^{i2\theta}+\cdots+r^ne^{in\theta}),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}-1}{re^{i\theta}-1} &= \Big(1 + r\cos\theta + r^2\cos(2\theta) + \cdots + r^n\cos(n\theta)\Big) \\ &\quad + i\Big(r\sin\theta + r^2\sin(2\theta) + \cdots + r^n\sin(n\theta)\Big).\end{aligned}$$

Τώρα, γράφουμε

$$\frac{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}-1}{re^{i\theta}-1} = \frac{(r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}-1)(re^{-i\theta}+1)}{|re^{i\theta}-1|^2} = \frac{r^{n+2}e^{in\theta} - re^{-i\theta} + r^{n+1}e^{i(n+1)\theta} - 1}{r^2+1-2r\cos\theta},$$

και τελικά έχουμε

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos(2\theta) + \cdots + r^n\cos(n\theta) = \frac{r^{n+2}\cos(n\theta) - r\cos\theta + r^{n+1}\cos((n+1)\theta) - 1}{r^2+1-2r\cos\theta}$$

και
$$r\sin\theta + r^2\sin(2\theta) + \cdots + r^n\sin(n\theta) = \frac{r^{n+2}\sin(n\theta) + r\sin\theta + r^{n+1}\sin((n+1)\theta)}{r^2 + 1 - 2r\cos\theta}.$$

1.30. Αποδείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z^n) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $z \in \mathbb{R}$ και $z \geqslant 0$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z \neq 0$. Γράφουμε $z = re^{i\theta}$, όπου $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\mathrm{Re}(z^n) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα δείξουμε ότι $\theta = 0$ και έπεται ότι $z = r > 0$.

Έστω ότι $\theta \neq 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $0 < \theta \leqslant \pi/2$: Τότε, για τον μικρότερο $n \geqslant 2$ με $n\theta > \pi/2$ έχουμε $(n-1)\theta \leqslant \pi/2$, άρα $n\theta \leqslant \pi/2 + \theta \leqslant \pi$. Αφού $\pi/2 < n\theta \leqslant \pi$, έπεται ότι $\mathrm{Re}(z^n) = r^n\cos(n\theta) < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$: Τότε, $\mathrm{Re}(z) = \cos\theta < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(iii) $-\pi < \theta < -\pi/2$: Τότε, $\mathrm{Re}(z) = \cos\theta < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(iv) $-\pi/2 \leqslant \theta < 0$: Τότε, $0 < -\theta \leqslant \pi/2$ και, όπως στο (i), βρίσκουμε $n \geqslant 2$ ώστε $\pi/2 < n(-\theta) \leqslant \pi$. Αφού $\overline{z} = re^{-i\theta}$, έπεται ότι $\mathrm{Re}(z^n) = \mathrm{Re}(\overline{z^n}) = \mathrm{Re}(\overline{z}^n) = r^n\cos(n(-\theta)) < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

1.31. Υπολογίστε τις ρίζες $(-1)^{1/2}$, $(-1)^{1/3}$, $(-1)^{1/4}$, $i^{1/2}$, $i^{1/3}$, $i^{1/4}$.

Υπόδειξη.

(α΄) Γράφουμε $-1 = e^{\pi i}$, άρα οι τιμές του $(-1)^{1/2}$ είναι $e^{\pi i/2} = i$ και $e^{\pi i/2+\pi i} = -i$. Δύο αντίθετες ρίζες.

(β΄) Γράφουμε $-1 = e^{\pi i}$, άρα οι τιμές του $(-1)^{1/3}$ είναι $e^{\pi i/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{\pi i/3+2\pi i/3} = e^{\pi i} = -1$ και $e^{\pi i/3+4\pi i/3} = e^{-\pi i/3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

(γ΄) Γράφουμε $-1 = e^{\pi i}$, άρα οι τιμές του $(-1)^{1/4}$ είναι $e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{\pi i/4+\pi i/2} = e^{3\pi i/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{\pi i/4+\pi i} = e^{5\pi i/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ και $e^{\pi i/4+3\pi i/2} = e^{-\pi i/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Κορυφές τετραγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

(δ΄) Γράφουμε $i = e^{\pi i/2}$, άρα οι τιμές του $i^{1/2}$ είναι $e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ και $e^{\pi i/4+\pi i} = e^{5\pi i/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. Δύο αντίθετες ρίζες.

(ε΄) Γράφουμε $i = e^{\pi i/2}$, άρα οι τιμές του $i^{1/3}$ είναι $e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{\pi i/6+2\pi i/3} = e^{5\pi i/6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ και $e^{\pi i/6+4\pi i/3} = e^{3\pi i/2} = -i$. Κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

(ϛ΄) Γράφουμε $i = e^{\pi i/2}$, άρα οι τιμές του $i^{1/4}$ είναι οι $e^{\pi i/8+k\pi i/2}$, $k = 0,1,2,3$. Κορυφές τετραγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

1.32. Αν $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, να αποδείξετε ότι:

(i) $z^3 - 1 = 0$.

(ii) $z^2 + z + 1 = 0$.

(iii) $z^{2019} = 1$.

(iv) $(1+z)^{2n} = z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (i) Έχουμε $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2i\pi/3}$, άρα
$$z^3 = (e^{2i\pi/3})^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

(ii) Από την $0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ και το γεγονός ότι $z \neq 1$ συμπεραίνουμε ότι $z^2 + z + 1 = 0$.

(iii) Γράφουμε $z^{2019} = z^{3\cdot 673} = (z^3)^{673} = 1^{673} = 1$.

(iv) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $(1+z)^{2n} = [(1+z)^2]^n = (z^2+2z+1)^n = ((z^2+z+1)+z)^n = (0+z)^n = z^n$, αφού $z^2+z+1 = 0$ από το (ii).

1.33. Έστω $n \geqslant 2$ και $z_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας. Να αποδείξετε ότι:

(i) Οι z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(ii) $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0$.

(iii) $z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

(iv) $(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) = z^n - 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(v) $(1 - z_1) \cdots (1 - z_{n-1}) = n$.

(vi) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k^s = 0$ για κάθε $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι $z_k = (e^{2\pi i/n})^k = z_1^k$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και $z_0 = 1$. Άρα, οι z_k αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον z_0 και λόγο z_1.

(ii) Έχουμε $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 1 + z_1 + \cdots + z_1^{n-1} = \frac{1-z_1^n}{1-z_1} = 0$, διότι $z_1^n = 1$.

(iii) Έχουμε

$$z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} z_1^k = z_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{(n-1)\pi i} = (e^{\pi i})^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

(iv) Οι $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ είναι όλοι ρίζες της $z^n - 1$, άρα τα πολυώνυμα $z - z_k$ διαιρούν το $z^n - 1$. Έπεται ότι $z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})q(z)$ για κάποιο πολυώνυμο $q(z)$. Εξισώνοντας βαθμούς και συντελεστές μεγιστοβάθμιων όρων βλέπουμε ότι $q(z) \equiv 1$, άρα $(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) = z^n - 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(v) Αφού $z_0 = 1$, από το (iv) για $z \neq 1$ έχουμε

$$(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \cdots + z^{n-1}.$$

Αφήνοντας το $z \to 1$ βλέπουμε ότι $(1 - z_1) \cdots (1 - z_{n-1}) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{n-1} = n$.

(vi) Παρατηρούμε ότι $z_1^s = z_s \neq 1$ για κάθε $s = 1, 2, \ldots, n-1$, άρα

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^s = \sum_{k=0}^{n-1} (z_1^s)^k = \frac{(z_1^s)^n - 1}{z_1^s - 1} = \frac{(z_1^n)^s - 1}{z_1^s - 1} = \frac{1^s - 1}{z_1^s - 1} = 0$$

για κάθε $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

1.34. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Υπόδειξη. Οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι $z_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Άρα,

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - e^{2\pi i/n}) \cdots (z - e^{2(n-1)\pi i/n}).$$

Διαιρώντας με $z - 1$ παίρνουμε

$$z^{n-1} + \cdots + z + 1 = (z - e^{2\pi i/n}) \cdots (z - e^{2(n-1)\pi i/n}),$$

και θέτοντας $z = 1$ έχουμε $n = (1 - e^{2\pi i/n}) \cdots (1 - e^{2(n-1)\pi i/n})$, άρα

$$n^2 = |1 - e^{2\pi i/n}|^2 \cdots |1 - e^{2(n-1)\pi i/n}|^2 = \prod_{k=1}^{n-1} 2\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{n} = 2^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n}.$$

Αφού $\sin \frac{k\pi}{n} > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$, έπεται ότι

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1.35. Να λύσετε την εξίσωση $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $p(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1$. Παρατηρούμε ότι $p(i) = 0$ και αφού το $p(z)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχουμε επίσης $p(-i) = 0$. Άρα, το $p(z)$ διαιρείται με το $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$. Κάνοντας τη διαίρεση πολυωνύμων βλέπουμε ότι

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - z + 1).$$

Οι ρίζες του $q(z) = z^2 - z + 1$ είναι οι $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Συνεπώς, η εξίσωση $p(z) = 0$ έχει τέσσερις ρίζες, τις

$$i, \quad -i, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.36. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού αριθμού $3 + i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6 = -64$.

Υπόδειξη. Έχουμε $-64 = 2^6 e^{\pi i}$, άρα οι ρίζες της $z^6 = -64$ είναι οι $2e^{\pi i/6 + k\pi i/3}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, δηλαδή οι

$$\pm 2i, \qquad \sqrt{3} \pm i, \qquad -\sqrt{3} \pm i.$$

Η μέγιστη απόσταση είναι αυτή του $3 + i\sqrt{3}$ από τον $-\sqrt{3} - i$, η οποία είναι ίση με

$$|(3 + i\sqrt{3}) - (-\sqrt{3} - i)| = |\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} + 1)| = 2(\sqrt{3} + 1).$$

1.37. Να λύσετε τις εξισώσεις $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$, $z^2 = \sqrt{3} + 3i$ και $z^3 + i = 0$.

Υπόδειξη. Για την πρώτη εξίσωση γράφουμε $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{2\pi i/3}$. Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι

$$z_k = \sqrt[4]{2}e^{(2\pi i + 2k\pi i)/3}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Δηλαδή, οι

$$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{\pi i/6}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}e^{2\pi i/3}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}e^{7\pi i/6}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{55\pi i/3}.$$

Για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $|\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{12}$ και $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, συνεπώς $\sqrt{3} + 3i = \sqrt{12}e^{\pi i/3}$. Έπεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης

$$z^2 = \sqrt{3} + 3i = \sqrt{12}e^{\pi i/3}$$

είναι οι $z_k = \sqrt[4]{12}e^{(2k\pi i + \pi i/3)/2}$, $k = 0, 1$. Δηλαδή, οι

$$z_0 = \sqrt[4]{12}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

και

$$z_1 = \sqrt[4]{12}(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)) = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(\sqrt{3} + i).$$

Για την τρίτη εξίσωση έχουμε $z^3 + i = 0$ αν και μόνο αν

$$z^3 = -i = e^{-\pi i/2},$$

άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι

$$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{3}i\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Πιο συγκεκριμένα, οι

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{-\pi i/6} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}-i}{2}i, \\ z_1 &= e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i, \\ z_2 &= e^{7\pi i/6} = \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}. \end{aligned}$$

1.38. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης $z^{n-1} = \bar{z}$.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα, χωριστά, τις περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$.

Για $n = 1$ έχουμε την εξίσωση $\bar{z} = 1$ με μοναδική λύση την $z = 1$. Για $n = 2$ έχουμε την εξίσωση $z = \bar{z}$ που είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{Im}(z) = 0$. Δηλαδή, οι λύσεις της εξίσωσης είναι όλοι οι $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $n \geqslant 3$. Μία λύση της εξίσωσης είναι η $z = 0$. Αν ο $z \neq 0$ είναι λύση της εξίσωσης τότε από την $z^{n-1} = \bar{z}$ παίρνουμε $|z|^{n-1} = |z| \iff |z|^{n-2} = 1 \iff |z| = 1$. Δηλαδή, οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης είναι οι $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους $|z| = 1$ και $z^{n-1} = \bar{z} = \frac{1}{z}$ ή ισοδύναμα $z^n = 1$. Τελικά, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $z \in \{0, 1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$, όπου $\omega = e^{2\pi i/n}$.

1.39. Δείξτε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = (1-z)^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι οι

$$z_k = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $z^n = (1-z)^n$ αν και μόνο αν $\left(\frac{1}{z} - 1\right)^n = 1$ διότι προφανώς ο $z = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Άρα, έχουμε τις λύσεις z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ όπου

$$\frac{1}{z_k} - 1 = e^{2k\pi i/n}.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_k} &= 1 + \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n) = 2\cos^2(k\pi/n) + 2i\sin(k\pi/n)\cos(k\pi/n) \\ &= 2\cos(k\pi/n)(\cos(k\pi/n) + i\sin(k\pi/n)), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2\cos(k\pi/n)(\cos(k\pi/n) + i\sin(k\pi/n))} = \frac{\cos(k\pi/n) + i\sin(k\pi/n)}{2\cos(k\pi/n)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

1.40. Να λύσετε τις εξισώσεις $e^z = e^{1+i}$, $e^z = 1 + i$ και $e^z = -1 + i\sqrt{3}$.

Υπόδειξη. Για την πρώτη εξίσωση έχουμε $e^z = e^{1+i}$ αν και μόνο αν $z = (1+i) + 2k\pi i = 1 + (2k\pi + 1)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$, άρα

$$e^z = -1 + i \iff e^z = \sqrt{2}e^{\pi i/4} \iff e^z = e^{\frac{1}{2}\ln 2 + (\pi/4)i},$$

η οποία μας δίνει ως λύσεις της εξίσωσης τους

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i = \frac{1}{2}\ln 2 + \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Για την τρίτη εξίσωση έχουμε $-1+i\sqrt{3}=2e^{2\pi i/3}$, άρα

$$e^z=-1+i\sqrt{3} \iff e^z=2e^{2\pi i/3} \iff e^z=e^{\ln 2+(2\pi/3)i},$$

η οποία μας δίνει ως λύσεις της εξίσωσης τους

$$z=\ln 2+\frac{2\pi}{3}i+2k\pi i=\ln 2+\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

1.41. Να λύσετε την εξίσωση $\cos z=\frac{1}{2}$. Τι παρατηρείτε;

Υπόδειξη. Θέτουμε $\zeta=e^{iz}$. Τότε, $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$. Άρα, η εξίσωση $\cos z=\frac{1}{2}$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{2} \iff \zeta^2+1=\zeta \iff \zeta^2-\zeta+1=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις ως προς ζ, άρα έχει άπειρες λύσεις ως προς z.

1.42. Να αποδείξετε ότι για κάθε $w\in\mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos z=w$ έχει λύση. Τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση $\cos z$;

Υπόδειξη. Θέτουμε $\zeta=e^{iz}$. Τότε, $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$. Αν $w\in\mathbb{C}$ τότε η εξίσωση $\cos z=w$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)=w \iff \zeta^2+1=2\zeta w \iff \zeta^2-2\zeta w+1=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις ως προς ζ, άρα έχει άπειρες λύσεις ως προς z.

1.43. Να βρείτε όλες τις λύσεις των εξισώσεων

$$\cosh z=\frac{1}{2}, \quad \sinh z=i, \quad \cosh z=-2.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $w=e^z$. Τότε, $\cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\frac{w^2+1}{2w}$ και $\sinh z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=\frac{w^2-1}{2w}$. Η εξίσωση $\cosh z=\frac{1}{2}$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $w^2+1=w$ ή $w^2-w+1=0$. Η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις ως προς w, καθεμία από τις οποίες μας δίνει άπειρες λύσεις ως προς z.

Ομοίως, η $\sinh z=i$ γίνεται $w^2-2iw+1=0$ και η $\cosh z=-2$ γίνεται $w^2+4w+1=0$.

1.44. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς i^π, π^i, $\mathrm{Log}(-1)$ και $\mathrm{Log}(i)$.

Υπόδειξη. Έχουμε $i^\pi=e^{\pi\log(i)}$ από τον ορισμό. Επίσης $i=e^{\pi i/2}$, άρα $\log(i)=(2k+1/2)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. Τελικά,

$$i^\pi=e^{(2k+1/2)\pi^2 i}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Για τον π^i από τον ορισμό έχουμε

$$\pi^i=e^{i\log\pi}=e^{i(\ln\pi+2k\pi i)}=e^{-2k\pi+i\ln\pi}=e^{2k\pi+i\ln\pi}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Αφού $-1=e^{\pi i}$, έχουμε $\mathrm{Arg}(-1)=\pi$. Άρα,

$$\mathrm{Log}(-1)=\ln|-1|+\pi i=\pi i.$$

Τέλος, αφού $i=e^{\pi i/2}$, έχουμε $\mathrm{Arg}(i)=\pi/2$. Άρα,

$$\mathrm{Log}(i)=\ln|i|+\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{2}i.$$

1.45. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς:

$$w_1 = \mathrm{Log}(-1+i), \quad w_2 = \mathrm{Log}(3+\sqrt{3}i).$$

Υπόδειξη. Οι απαντήσεις έχουν ως εξής:

$$w_1 = \frac{1}{2}\ln 2 + i\cdot\frac{3\pi}{4}, \qquad w_2 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + i\cdot\frac{\pi}{6}\ .$$

Φέρνουμε πρώτα τους μιγαδικούς αριθμούς μέσα στον λογάριθμο σε πολική μορφή

$$-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \qquad 3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε

$$w_1 = \ln\sqrt{2} + i\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\cdot\frac{3\pi}{4}$$

$$w_2 = \ln(2\sqrt{3}) + i\cdot\frac{\pi}{6} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + i\cdot\frac{\pi}{6}\ .$$

1.46. Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα

$$\mathrm{Log}((1+i)^2) = 2\mathrm{Log}(1+i)$$

αλλά

$$\mathrm{Log}((-1+i)^2) \neq 2\mathrm{Log}(-1+i).$$

Υπόδειξη. Έχουμε $1+i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$, άρα $(1+i)^2 = 2e^{\pi i/2}$. Συνεπώς, $\mathrm{Log}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i$, και

$$\mathrm{Log}((1+i)^2) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i = 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right) = 2\mathrm{Log}(1+i).$$

Ομοίως, έχουμε $-1+i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, άρα $(-1+i)^2 = 2e^{3\pi i/2} = 2e^{-\pi i/2}$. Συνεπώς, $\mathrm{Log}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4}i$, και

$$\mathrm{Log}((-1+i)^2) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}i \neq 2 + \frac{3\pi}{2}i = 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4}i\right) = 2\mathrm{Log}(-1+i).$$

1.47. Δείξτε ότι το σύνολο των τιμών του $\log(i^{1/2})$ είναι το $\left\{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi i : n\in\mathbb{Z}\right\}$ και το ίδιο ισχύει για τον $\frac{1}{2}\log i$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των τιμών του $\log(i^2)$ δεν συμπίπτει με το σύνολο των τιμών του $2\log\, i$.

Υπόδειξη. Έχουμε $i = e^{\pi i/2}$, άρα ο $i^{1/2}$ παίρνει τις τιμές $e^{\pi i/4}$ και $e^{(\pi/4+\pi)i}$ και ο $\log(i^{1/2})$ παίρνει τις τιμές

$$\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i \quad \text{και} \quad \left(\frac{\pi}{4}+\pi+2k\pi\right)i, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

δηλαδή $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$.

Όμοια, έχουμε $i = e^{\pi i/2}$, άρα ο $\log i$ παίρνει τις τιμές $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i$, $n\in\mathbb{Z}$ και ο $\frac{1}{2}\log i$ παίρνει τις τιμές $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$. Δηλαδή, οι $\log(i^{1/2})$ και $\frac{1}{2}\log i$ έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

Τέλος, έχουμε $i^2 = -1 = e^{\pi i}$, άρα ο $\log(i^2)$ παίρνει τις τιμές $\pi i + 2n\pi i = (2n+1)\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$, ενώ ο $2\log\, i$ παίρνει τις τιμές $2\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i = (4n+1)\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$.

1.48. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες: για κάθε $z\in\mathbb{C}$,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(2z) = 2\sin z\cdot\cos z, \quad \sinh(2z) = 2\sinh z\cdot\cosh z.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε τους ορισμούς

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

και εκτελούμε τις πράξεις. Για παράδειγμα,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} + \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{(2i)^2} = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Ομοίως,

$$2\sin z \cdot \cos z = 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{(e^{iz})^2 - (e^{-iz})^2}{2i} = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin(2z).$$

Τέλος,

$$2\sinh z \cdot \cosh z = 2\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \frac{(e^{z})^2 - (e^{-z})^2}{2} = \frac{e^{2z} - e^{-2z}}{2} = \sinh(2z).$$

1.49. Αποδείξτε ότι για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leqslant |\sin z|, \quad |\cos x| \leqslant |\cos z|, \quad |\sinh y| \leqslant |\sin z| \leqslant \cosh y, \quad |\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y.$$

Υπόδειξη. Αν $z = x + iy$, αντικαθιστώντας $e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$ και $e^{-iz} = e^{y-ix} = e^{y}(\cos x - i\sin x)$ στον ορισμό των $\cos z$ και $\sin z$ βλέπουμε ότι

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad \text{και} \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Άρα,

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \quad \text{και} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y.$$

Χρησιμοποιώντας και την $\cosh^2 y = \sinh^2 y + 1$ παίρνουμε

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad \text{και} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Είναι τώρα φανερό ότι $|\sin x| \leqslant |\sin z|$, $|\sinh y| \leqslant |\sin z|$, $|\cos x| \leqslant |\cos z|$ και $|\sinh y| \leqslant |\cos z|$. Επίσης,

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = (\cos^2 x - 1) + \cosh^2 y \leqslant \cosh^2 y,$$

άρα $|\cos z| \leqslant \cosh y$, και

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = (\sin^2 x - 1) + \cosh^2 y \leqslant \cosh^2 y,$$

άρα $|\sin z| \leqslant \cosh y$.

1.50. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία

$$\arg[z - (1 + 2i)] = -\frac{\pi}{3}.$$

Υπόδειξη. Ένα σημείο $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου ικανοποιεί την $\arg[z - (1 + 2i)] = -\pi/3$ αν για το $w = z - (1 + 2i) = (x - 1) + i(y - 2)$ έχουμε $\arg(w) = -\pi/3$, δηλαδή

$$\frac{y-2}{x-1} = \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Άρα, τα σημεία που ζητάμε είναι τα σημεία της ευθείας

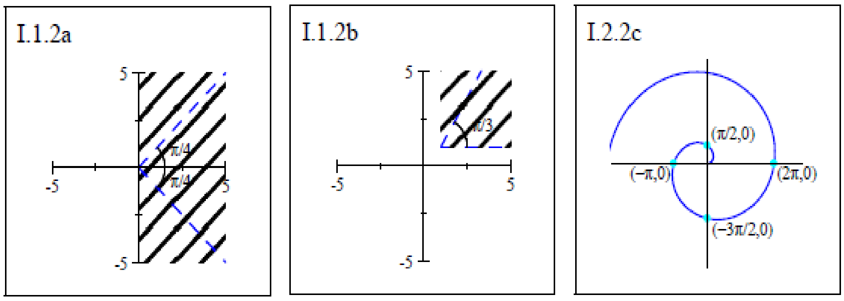
$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1)$$

που διέρχεται από το σημείο $1+2i$ και έχει κλίση $-\sqrt{3}$.

1.51. Περιγράψτε τα πιο κάτω σύνολα:

$$\text{(i)}\ \ |\arg z| < \pi/4, \quad \text{(i)}\ \ 0 < \arg(z-1-i) < \pi/3, \quad \text{(iii)}\ \ |z| = \arg z, \quad \text{(iv)}\ \ \log|z| = -2\arg z.$$

Υπόδειξη. (i) Τομέας (γωνία) μεταξύ των $y=-x$ και $y=x$, με κορυφή το $(0,0)$. (ii) Τομέας με κορυφή το $(1,1)$. (iii) Αν γράψουμε $z = re^{i\theta}$, όπου $\theta = \arg(z)$, η εξίσωση $|z| = \arg z$ γίνεται $r = \theta$ και ικανοποιείται από τα σημεία μιας σπείρας που ξεκινάει από το 0 και περιελίσσεται προς το άπειρο. Συναντάει, για παράδειγμα, τον θετικό πραγματικό ημιάξονα στα $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ και τον θετικό φανταστικό ημιάξονα στα $\frac{\pi}{2}i, \frac{5\pi}{2}i, \frac{9\pi}{2}i, \ldots$



(iv) Όπως και στο (iii), αν γράψουμε $z = re^{i\theta}$ όπου $\theta = \arg(z)$, έχουμε την σπείρα $r = -2\theta$, που ξεκινάει από το 0 και περιελίσσεται προς το άπειρο ακολουθώντας την φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή αντίστροφη από αυτήν της (iii).

1.52. Αν $f(z) = z + 1 + z\,\mathrm{Log}\,z$ να αποδείξετε ότι $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$.

Υπόδειξη. Αφού $\lim_{z\to 0}(z+1) = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{z\to 0}(z\,\mathrm{Log}\,z) = 0$. Για $z \neq 0$ γράφουμε $z = re^{i\theta}$, όπου $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ και έχουμε $\mathrm{Log}\,z = \ln r + i\theta$. Αφού $\theta = \mathrm{Arg}\,z$, έχουμε $|\theta| \leqslant \pi$. Συνεπώς,

$$|z\,\mathrm{Log}\,z| = r \cdot |\ln r + i\theta| \leqslant r \cdot \ln r + \pi r.$$

Έχουμε $z \to 0$ αν και μόνο αν $r \to 0^+$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{r\to 0^+}(r \cdot \ln r) = 0$, άρα $r \cdot \ln r + \pi r \to 0$ όταν $r \to 0^+$. Έπεται ότι $|z\,\mathrm{Log}\,z| \to 0$ όταν $z \to 0$, άρα $\lim_{z\to 0}(z\,\mathrm{Log}\,z) = 0$.

1.53. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{z\to 0} \mathrm{Log}\,z, \qquad \lim_{z\to 0} e^{\bar{z}}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|}.$$

Υπόδειξη. Το $\lim_{z\to 0} \mathrm{Log}\,z$ δεν υπάρχει. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $z_n = \frac{1}{n}$ τότε $z_n \to 0$ και $|\mathrm{Log}\,z_n| = |\ln(1/n)| = \ln n \to +\infty$.

Έχουμε $z = x + iy \to 0$ αν και μόνο αν $x \to 0$ και $y \to 0$. Τότε, $e^z = e^x \cos y + i(e^x \sin y) \to 1 + i \cdot 0 = 1$. Άρα, $\lim_{z\to 0} e^z = 1$.

Αν $z = x + i \cdot 0$ και $x \to 0$ τότε $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x}{x} = 1 \to 1$. Αν $z = 0 + iy$ και $y \to 0$ τότε $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{iy}{-iy} = -1 \to -1$. Άρα, το $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ δεν υπάρχει.

Έχουμε $\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|} = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για $z = x + iy \neq 0$. Από την $2|xy| \leqslant x^2 + y^2$ έπεται ότι

$$\left|\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|}\right| = \frac{2|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$

καθώς το $(x,y) \to (0,0)$. Συεπώς, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|} = 0$.

1.54. Να βρείτε την εικόνα του κύκλου $|z| = 1$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Υπόδειξη. Αν $|z| = 1$ τότε $\frac{1}{z} = \bar{z}$, άρα $f(z) = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Συνεπώς, η εικόνα του κύκλου $|z| = 1$ μέσω της f είναι το σύνολο $\{2x : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} = \{2x : x^2 \leqslant 1\} = [-2, 2]$.

1.55. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$w = f(z) = \frac{i+z}{i-z}, \quad z \in \mathbb{C},\ z \neq i.$$

Αποδείξτε ότι η $w = f(z)$ απεικονίζει το τυχόν σημείο z του μοναδιαίου κύκλου $C(0,1)$ στον φανταστικό άξονα $\mathrm{Re}w = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $z \in C(0,1) \setminus \{i\}$. Χρησιμοποιώντας την $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\, f(z) &= \frac{i+z}{i-z} + \overline{\frac{i+z}{i-z}} = \frac{i+z}{i-z} + \frac{-i+\bar{z}}{-i-\bar{z}} = \frac{-(i+z)(i+\bar{z}) - (i-\bar{z})(i-z)}{-(i-z)(i+\bar{z})} \\ &= \frac{1 - iz - i\bar{z} - |z|^2 + 1 + i\bar{z} + iz - |z|^2}{-(i-z)(i+\bar{z})} = \frac{2 - 2|z|^2}{-(i-z)(i+\bar{z})} = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\mathrm{Re}\, w = \mathrm{Re}\, f(z) = 0$.

1.56. Περιγράψτε την εικόνα καθεμιάς από τις πιο κάτω καμπύλες μέσω της απεικόνισης $w = z^2$:

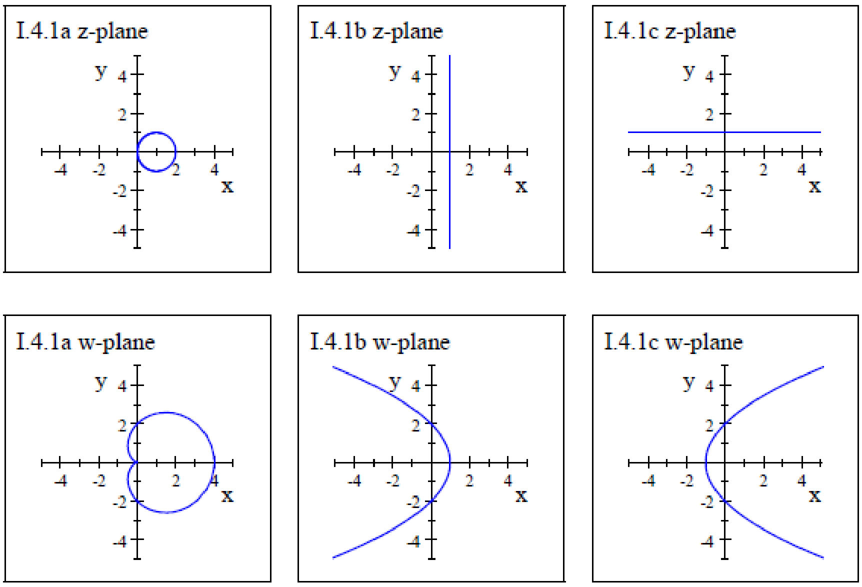
(a) $|z-1| = 1$, (b) $x = 1$, (c) $y = 1$,

(d) $y = x + 1$, (e) $y^2 = x^2 - 1$, $x > 0$, (f) $y = 1/x$, $x \neq 0$.

Υπόδειξη. (a) Η εικόνα του κύκλου με κέντρο το 1 και ακτίνα 1 είναι η καμπύλη στο σχήμα.

(b) Αν $z = 1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$ τότε $w = z^2 = (1 - y^2) + 2yi$. Δηλαδή, $w = a + bi$, όπου $a = 1 - \frac{b^2}{4}$, $b \in \mathbb{R}$.

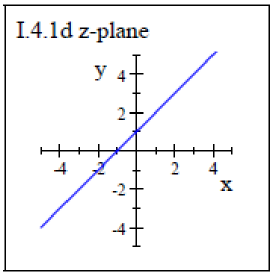
(c) Αν $z = x + i$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $w = z^2 = (x^2 - 1) + 2xi$. Δηλαδή, $w = a + bi$, όπου $a = \frac{b^2}{4} - 1$, $b \in \mathbb{R}$.

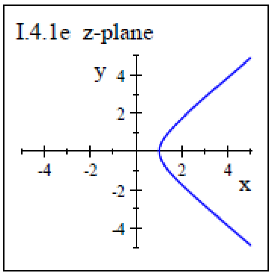


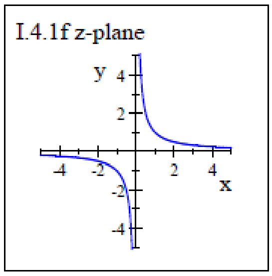
(d) Αν $z = x + i(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $w = z^2 = -(2x+1) + 2x(x+1)i$. Δηλαδή $w = a + bi$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b = \frac{a^2-1}{2}$.

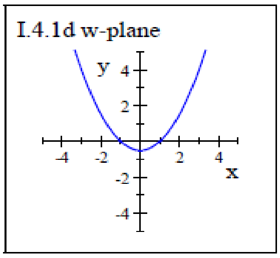
(e) Αν $z = x + iy$, όπου $x > 0$ και $y^2 = x^2 - 1$, τότε $w = z^2 = 1 + 2xi$. Δηλαδή, $w = 1 + bi$, όπου $b > 0$. Η εικόνα είναι κατακόρυφη ημιευθεία στο w-επίπεδο.

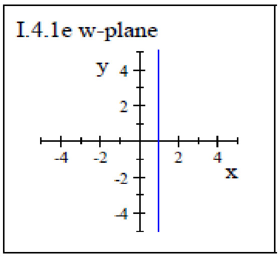
(f) Αν $z = x + iy$, όπου $x \neq 0$ και $y = 1/x$, τότε $w = z^2 = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 2i$. Οι τιμές που παίρνει η $x \mapsto x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ είναι όλοι οι $a \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, $w = a + 2i$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Η εικόνα είναι οριζόντια ευθεία στο w-επίπεδο.

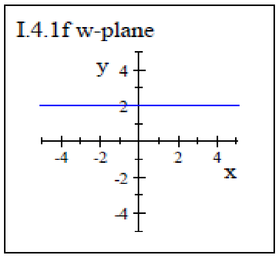












1.57. Περιγράψτε την εικόνα καθενός από τα πιο κάτω χωρία μέσω της απεικόνισης $w = e^z$:

(a) της κατακόρυφης λωρίδας $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$.

(b) της οριζόντιας λωρίδας $5\pi/3 < \mathrm{Im}(z) < 8\pi/3$.

(c) του ορθογωνίου $0 < x < 1$, $0 < y < \pi/4$.

(d) του δίσκου $|z| \leqslant \pi/2$.

(e) του δίσκου $|z| \leqslant \pi$.

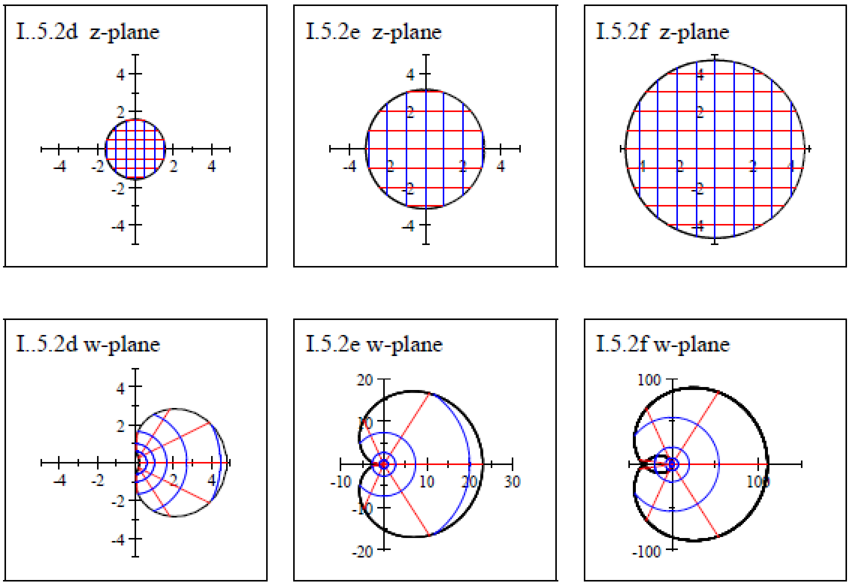
(f) του δίσκου $|z| \leqslant 3\pi/2$.

Υπόδειξη. (a) Τα σημεία της λωρίδας $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ είναι τα $x + iy$ με $0 < x < 1$. Απεικονίζονται στα σημεία $w = re^{iy}$, όπου $r = e^x$ και $y \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $1 < r < e$ και το y είναι ελεύθερο, άρα η εικόνα είναι ο δακτύλιος $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e\}$.

(b) Τα σημεία της λωρίδας $\frac{5\pi}{3} < \mathrm{Im}(z) < \frac{8\pi}{3}$ είναι τα $x + iy$ με $5\pi/3 < y < 8\pi/3$. Απεικονίζονται στα σημεία $w = re^{iy}$, όπου $r = e^x$ και $x \in \mathbb{R}$, $5\pi/3 < y < 8\pi/3$. Άρα, η εικόνα είναι το ημιεπίπεδο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -\sqrt{3}x\}$.

(c) Τα σημεία του ορθογωνίου $0 < x < 1$, $0 < y < \pi/4$ απεικονίζονται στα σημεία $w = re^{iy}$ όπου $r = e^x$, $0 < y < \pi/4$. Παρατηρήστε ότι $1 < r < e$ και $y \in (0, \pi/4)$, άρα η εικόνα είναι τμήμα $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/4\}$ του δακτυλίου $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < e\}$.

(d)-(e)-(f) Οι εικόνες στο w-επίπεδο είναι οι παρακάτω:



1.58. Περιγράψτε την εικόνα καθενός από τα πιο κάτω χωρία μέσω της απεικόνισης $w = \operatorname{Log} z$:

(a) του δεξιού ημιεπιπέδου $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(b) του ημι-δίσκου $|z| < 1$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(c) του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$.

(d) του δακτυλίου με σχισμή $\sqrt{e} < |z| < e^2$, $z \notin (-e^2, -\sqrt{e})$.

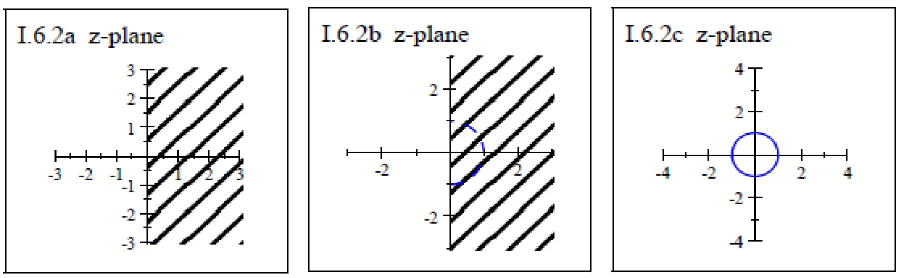
(e) της οριζόντιας ευθείας $y = e$.

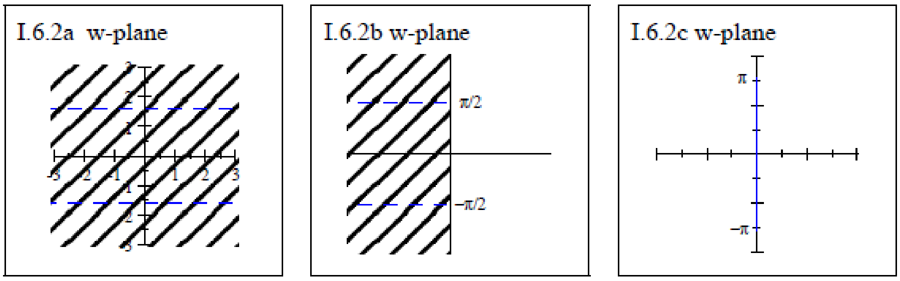
(f) της κατακόρυφης ευθείας $x = e$.

Υπόδειξη. (a) Αν $z = x + iy$, όπου $x > 0$, τότε $w = a + bi$, όπου ο $a = \ln(x^2 + y^2)$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές και ο $b = \operatorname{Arg}(z)$ παίρνει όλες τις τιμές στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Η εικόνα είναι η οριζόντια λωρίδα $\{w \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im}(w) < \pi/2\}$.

(b) Αν $z = x+iy$, όπου $x > 0$ και $x^2+y^2 < 1$, τότε $w = a+bi$, όπου ο $a = \ln(x^2+y^2)$ παίρνει όλες τις αρνητικές πραγματικές τιμές και ο $b = \operatorname{Arg}(z)$ παίρνει όλες τις τιμές στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Η εικόνα είναι το «αριστερό μισό» $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, -\pi/2 < \operatorname{Im}(w) < \pi/2\}$ της οριζόντιας λωρίδας $\{w \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im}(w) < \pi/2\}$.

(c) Αν $z = x+iy$, όπου $x^2+y^2 = 1$, τότε $w = a+bi$, όπου ο $a = \ln(x^2+y^2) = 0$ και ο $b = \operatorname{Arg}(z)$ παίρνει όλες τις τιμές στο $(-\pi, \pi]$. Η εικόνα είναι το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, -\pi < \operatorname{Im}(w) \leqslant \pi\}$.

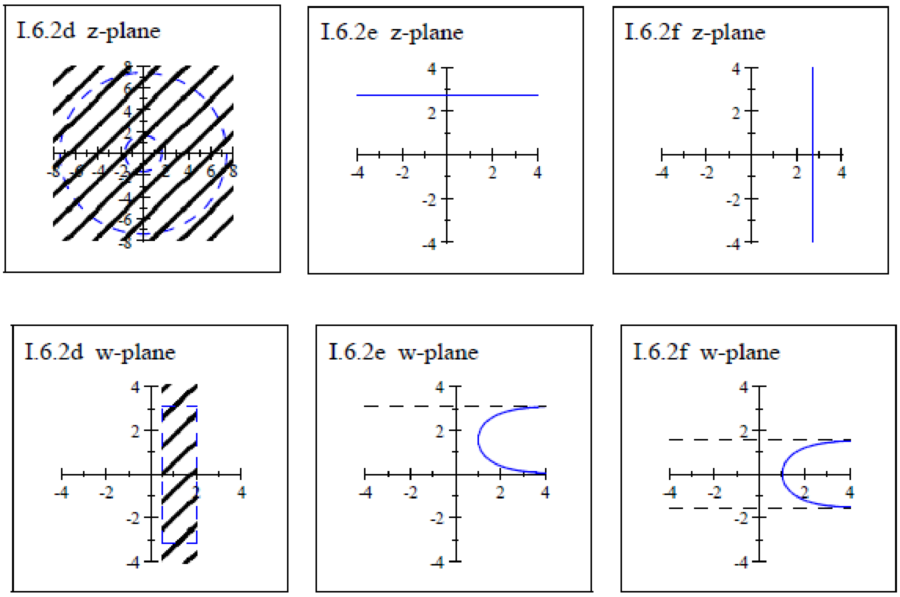




(d) Τα σημεία του δακτυλίου με σχισμή $\sqrt{e} < |z| < e^2$, $z \notin (-e^2, -\sqrt{e})$ απεικονίζονται στους $w = a + bi$ με $\frac{1}{2} < a < 2$ και $b \in (-\pi, \pi)$. Η εικόνα είναι ένα «ανοικτό» ορθογώνιο.

(e) Τα σημεία $z = x + ei$ της οριζόντιας ευθείας $y = e$ απεικονίζονται στους $w = a + bi$ με $a = \frac{1}{2}\ln(x^2 + e^2) \geqslant 1$ και $b = \operatorname{Arg}(z) \in (0, \pi)$ το οποίο παίρνει δύο διαφορετικές τιμές για κάθε δοθέν $a > 1$. Έτσι σχηματίζεται η καμπύλη στο παρακάτω σχήμα.

(f) Τα σημεία $z = e + yi$ της κατακόρυφης ευθείας $x = e$ απεικονίζονται στους $w = a + bi$ με $a = \frac{1}{2}\ln(e^2 + y^2) \geqslant 1$ και $b = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$ το οποίο παίρνει δύο διαφορετικές τιμές για κάθε δοθέν $a > 1$. Έτσι σχηματίζεται η καμπύλη στο παρακάτω σχήμα.



1.59. Θεωρούμε τη λωρίδα

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο. Να βρεθεί η εικόνα του συνόρου της λωρίδας Ω_1, καθώς επίσης και του ευθύγραμμου τμήματος $x = x_0$, $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$. Ποια είναι η εικόνα της λωρίδας Ω_1 μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$;

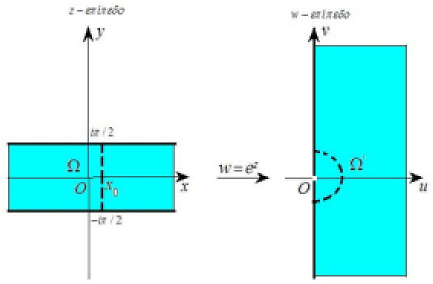
Μελετήστε τα αντίστοιχα ερωτήματα για τη λωρίδα

$$\Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant \pi \}$$

στο μιγαδικό επίπεδο.

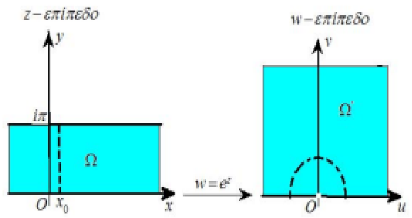
Υπόδειξη. Ο περιορισμός της $w = e^z$ στη λωρίδα Ω_1 είναι 1-1 και $w \neq 0$. Αν $z = x \pm i\frac{\pi}{2}$ τότε $w = e^{x \pm i\pi/2} = \pm ie^x$. Άρα, η ευθεία $y = \pi/2$ απεικονίζεται στον θετικό φανταστικό ημιάξονα και η ευθεία $y = -\pi/2$ στον αρνητικό φανταστικό ημιάξονα. Δηλαδή, το σύνορο της λωρίδας Ω_1 απεικονίζεται στον φανταστικό άξονα χωρίς το 0. Για $x \in \mathbb{R}$ και $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ έχουμε ότι το $w = e^{x+iy}$ διατρέχει το «δεξιό» ημικύκλιο με κέντρο το 0 και ακτίνα e^x. Αυτά τα ημικύκλια καλύπτουν το δεξιό ημιεπίπεδο του w-επιπέδου. Άρα, τελικά, η εικόνα της Ω_1 είναι το

$$\Omega_1' = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) \geqslant 0, w \neq 0\}.$$



Ο περιορισμός της $w = e^z$ στη λωρίδα Ω_2 είναι 1-1 και $w \neq 0$. Αν $z = x$ τότε $w = e^x$ και αν $z = x + i\pi$ τότε $w = e^{x+i\pi} = -e^x$. Άρα, η ευθεία $y = 0$ απεικονίζεται στον θετικό πραγματικό ημιάξονα και η ευθεία $y = \pi$ στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα. Δηλαδή, το σύνορο της λωρίδας Ω_2 απεικονίζεται στον πραγματικό άξονα χωρίς το 0. Για $x \in \mathbb{R}$ και $0 \leqslant y \leqslant \pi$ έχουμε ότι το $w = e^{x+iy}$ διατρέχει το «άνω» ημικύκλιο με κέντρο το 0 και ακτίνα e^x. Αυτά τα ημικύκλια καλύπτουν το άνω ημιεπίπεδο του w-επιπέδου. Άρα, τελικά, η εικόνα της Ω_2 είναι το

$$\Omega_2' = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(w) \geqslant 0, w \neq 0\}.$$



1.60. Θεωρούμε το χωρίο

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\right\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο. Να βρεθεί η εικόνα του Ω μέσω του μετασχηματισμού

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Υπόδειξη. Τα σημεία του Ω είναι τα $z = x + iy$ με $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ και $y \geqslant 0$. Έστω $w = \sin z = a + bi$. Αν σταθεροποιήσουμε το $x \in (0, \pi/2)$ έχουμε $a = \sin x \cosh y$, $b = \cos x \sinh y$ και από την $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ παίρνουμε

$$\frac{a^2}{\sin^2 x} - \frac{b^2}{\cos^2 x} = 1$$

δηλαδή το w διατρέχει τον δεξιό κλάδο αυτής της υπερβολής. Αυτοί οι κλάδοι υπερβολών καλύπτουν το $\{w = a + bi : a > 0, b > 0\} \cup \{w = a + bi : 0 < a < 1, b = 0\}$. Αν $x = \pi/2$ τότε έχουμε $a = \cosh y$ και $b = 0$, δηλαδή το w διατρέχει την ημιευθεία $a \geqslant 1$, $b = 0$. Αν $x = 0$ τότε έχουμε $a = 0$ και $b = \sinh y$, δηλαδή το w διατρέχει τον θετικό b-ημιάξονα. Συνολικά, η εικόνα του Ω είναι το πρώτο τεταρτημόριο $\Omega' = \{w = a + bi : a, b \geqslant 0\}$.

Κεφάλαιο 2

Μιγαδική παραγώγιση

2.1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο.

Υπόδειξη. Αν $z = x + iy$ τότε με απλές πράξεις βλέπουμε ότι $\overline{z}^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(y^3 - 3x^2y)$. Αφού $|z|^2 = x^2 + y^2$ έπεται ότι $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$.

Για να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$ πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) \quad \text{και} \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

δηλαδή $u_x(0, 0) = 1$, και

$$\lim_{y\to 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{v(0, y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3/y^2}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1,$$

δηλαδή $v_y(0, 0) = 1$. Συνεπώς,

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0).$$

Τελείως ανάλογα, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{u(0, y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

δηλαδή $u_y(0, 0) = 0$, και

$$\lim_{x\to 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{v(x, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

δηλαδή $v_x(0, 0) = 0$. Συνεπώς,

$$u_y(0, 0) = 0 = -v_x(0, 0).$$

Έχουμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ισχύουν στο $z_0 = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = 0$ τότε πρέπει να υπάρχει το

$$\ell := \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}.$$

Ειδικότερα, για $z = x + i0$ και $x \to 0$ θα πρέπει να έχουμε

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/x^2}{x} = 1$$

και για $z = x + ix$ και $x \to 0$ θα πρέπει να έχουμε

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,x)}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3/2x^2 + i(-2x^3/2x^2)}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{-(x+ix)}{x+ix} = -1.$$

Έπεται ότι $\ell = 1 = -1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = 0$.

2.2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο.

Υπόδειξη. Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ τότε

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{x^2/x}{x} = 1,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 1.$$

Ομοίως, αν $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ τότε

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{(\overline{iy})^2/iy}{y} = i,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = i.$$

Συνεπώς, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, δηλαδή $u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y$ στο $(0,0)$, το οποίο δείχνει ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο $(0,0)$.

Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = 0$ παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ισχύει ότι

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{z} = \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2.$$

Θεωρώντας $z = x + i\lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{\overline{x + i\lambda x}}{x + i\lambda x}\right)^2 = \left(\frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}\right)^2,$$

άρα το

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z = x + i\lambda x}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{1 - \lambda^2 - 2i\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2$$

εξαρτάται από το λ. Αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει η $f'(0)$.

2.3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = f(x + iy) = \sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τις εξισώσεις

Cauchy-Riemann στο σημείο $(0,0)$ αλλά δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

Υπόδειξη. Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ τότε

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0}{x} = 0,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$$

Ομοίως, αν $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ τότε

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{0}{y} = 0,$$

άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Συνεπώς, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, δηλαδή $u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y$ στο $(0,0)$, το οποίο δείχνει ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο $(0,0)$.

Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = 0$ παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ισχύει ότι

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}.$$

Θεωρώντας $z = x + i\lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda, x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)}.$$

Αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)} = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{1+\lambda i}$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)} = -\frac{\sqrt{|\lambda|}}{1+\lambda i},$$

βλέπουμε ότι το

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+i\lambda x}}\frac{f(z)-f(0)}{z=0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)}$$

δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$.

2.4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = (3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos 2x) + i(3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin 2x + 3)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$. Στη συνέχεια εκφράστε την f ως συνάρτηση του z και υπολογίστε εκ νέου την παράγωγο $f'(z)$.

Υπόδειξη. Γράφουμε $f = u + iv$, όπου $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos 2x$ και $v(x,y) = 3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin 2x + 3$. Οι u και v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$u_x(x,y) = 6xy - 2e^{2y}\sin 2x = v_y(x,y)$$

και

$$u_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 2e^{2y}\cos 2x = -v_x(x,y)$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ με παράγωγο

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (6xy - 2e^{2y}\sin 2z) + i(3y^2 - 3x^2 - 2e^{2y}\cos 2x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(z) = -i(x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3) + e^{2y}(\cos 2x - i\sin 2x) + 3i = -iz^3 + e^{-2iz} + 3i.$$

Από αυτήν την αναπαράσταση της f είναι επίσης φανερό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$, με παράγωγο

$$f'(z) = -3iz^2 - 2ie^{-2iz}.$$

2.5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = e^y\cos x + ie^y\sin x$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο $z \in \mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Οι $u(x, y) = e^y\cos x$ και $v(x, y) = e^y\sin x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε αυτό. Έχουμε

$$u_x = v_y \iff -e^y\sin x = e^y\sin x \iff e^y\sin x = 0 \iff \sin x = 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν $x = k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Όμοια,

$$u_y = -v_x \iff e^y\cos x = -e^y\cos x \iff e^y\cos x = 0 \iff \cos x = 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν $x = k\pi + \pi/2$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

Συνεπώς, οι $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα σε κανένα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, το οποίο δείχνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z \in \mathbb{C}$.

2.6. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = 2x + y^2 + i(x^2 - y^2)$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος.

Υπόδειξη. Οι $u(x, y) = 2x + y^2$ και $v(x, y) = x^2 - y^2$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Συνεπώς, η $f = u + iv$ είναι παραγωγίσιμη στο $z = x + iy$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, δηλαδή οι

$$2 = -2y, \quad 2y = -2x,$$

και έχουμε τη μοναδική λύση $x = 1$, $y = -1$. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $z = 1 - i$, με παράγωγο $f'(1 - i) = u_x(1, -1) + iv_x(1, -1) = 2 + 2i$.

2.7. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = x^3 + y + i(-x - y^3 + 3y)$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη. Οι $u(x, y) = x^3 + y$ και $v(x, y) = -x - y^3 + 3y$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Συνεπώς, η $f = u + iv$ είναι παραγωγίσιμη στο $z = x + iy$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, δηλαδή οι

$$3x^2 = -3y^2 + 3, \quad 1 = 1.$$

Το σύστημα αυτό έχει ως σύνολο λύσεων τον μοναδιαίο κύκλο $C(0, 1) = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = 1\}$. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη ακριβώς στα σημεία $z = x + iy \in C(0, 1)$, με παράγωγο $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2 - i$. Δεν υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη καθώς κάθε ανοικτός δίσκος περιέχει σημεία εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

2.8. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = (\overline{z} + 2i)^2 - 1$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη. Γράφουμε την f στη μορφή $u + iv$. Έχουμε

$$f(z) = f(x + iy) = (x + i(2 - y))^2 - 1]x^2 - (2 - y)^2 - 1 + 2ix(2 - y),$$

άρα $u(x, y) = x^2 - y^2 + 4y - 5$ και $v(x, y) = 4x - 2xy$. Οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $z = x + iy$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, δηλαδή

$$2x = -2x \quad \text{και} \quad -2y + 4 = -4 + 2y.$$

Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση το $(x, y) = (0, 2)$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $z = 2i$, με παράγωγο

$$f'(2i) = u_x(0, 2) + iv_x(0, 2) = 0 + i(4 - 2 \cdot 2) = 0.$$

Προφανώς δεν υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη.

2.9. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}e^{-|z|^2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

Υπόδειξη. Γράφουμε αρχικά

$$f(z) = (x - iy)e^{-(x^2+y^2)} = xe^{-(x^2+y^2)} + i\left(-ye^{-(x^2+y^2)}\right) = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου $u(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$ και $v(x, y) = -ye^{-(x^2+y^2)}$. Οι u και v είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $z = x+iy$ αν και μόνο αν οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ στο (x, y). Υπολογίζουμε τις

$$u_x = (1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad u_y = -2xye^{-(x^2+y^2)}, \quad v_x = 2xye^{-(x^2+y^2)}, \quad v_y = (2y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Η $u_x = v_y$ είναι ισοδύναμη με την $2x^2 + 2y^2 = 2$, δηλαδή $|z| = 1$. Η $u_y = -v_x$ ικανοποιείται για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $C(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, με παράγωγο

$$f'(z) = (1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)} + i \cdot 2xye^{-(x^2+y^2)} = (-\operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}(z^2))e^{-|z|^2} = -\overline{z^2}e^{-|z|^2} = -\frac{1}{z^2}e^{-|z|^2}.$$

2.10. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η $f(z) = \sin\overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη. Έχουμε $f(z) = f(x + iy) = \sin(x - iy)$. Με βάση τον ορισμό του $\sin z$ βρίσκουμε $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ όπου

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot (e^y + e^{-y}) \quad \text{και} \quad v(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot (e^{-y} - e^y).$$

Επομένως

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot (e^y + e^{-y}), \quad u_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot (e^y - e^{-y})$$
$$v_x(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot (e^{-y} - e^y), \quad v_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot (-e^{-y} - e^y).$$

Οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη το z αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο z. Από την εξίσωση $u_x = v_y$ προκύπτει

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot (e^y + e^{-y}) = 0.$$

Επειδή $e^y + e^{-y} > 0$ παίρνουμε $\cos x = 0$, ισοδύναμα $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Από την εξίσωση $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sin x \cdot (e^y - e^{-y}) = 0.$$

Αφού $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$ έχουμε $\sin x_k = \pm 1$, άρα $e^y - e^{-y} = 0$. Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι $y = 0$. Επομένως τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη είναι ακριβώς τα $z_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Η παράγωγος δίνεται από

$$f'(z_k) = u_x(x_k, 0) + iv_y(x_k, 0) = \frac{1}{2}\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (e^0 + e^0) + i\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot (e^0 - e^0) = 0.$$

Τέλος κάθε ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ περιέχει σημεία εκτός των z_k, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως δεν υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη.

2.11. Έστω f συνεχής συνάρτηση στον τόπο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f^2 είναι ολόμορφη στο U και ότι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο U.

Υπόδειξη. Έστω $z_0 \in U$. Έχουμε $\lim_{z \to z_0}(f(z) + f(z_0)) = 2f(z_0) \neq 0$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $D(z_0, \delta) \subseteq U$ και

$$f(z) + f(z_0) \neq 0 \quad \text{για κάθε} \;\; z \in D(z_0, \delta).$$

Τότε, για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ έχουμε

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(f(z))^2 - (f(z_0))^2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{f(z) + f(z_0)},$$

άρα

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = (f^2)'(z_0) \cdot \frac{1}{2f(z_0)},$$

το οποίο δείχνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

2.12. Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, δείξτε ότι και η $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \lim_{h \to 0} \overline{\frac{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}} \\ &= \lim_{u \to 0} \overline{\frac{f(\overline{z} + u) - f(\overline{z})}{u}} = \overline{f'(\overline{z})},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε βασικές αλγεβρικές ιδιότητες του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού, την αντικατάσταση $u = \overline{h}$ και το γεγονός ότι $h \to 0$ αν και μόνο αν $u = \overline{h} \to 0$. Αφού η f είναι ολόμορφη, η f' είναι συνεχής, άρα η g' είναι συνεχής, και έπεται ότι η g είναι ολόμορφη.

2.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ και $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0) και ότι το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

Υπόδειξη. Έστω $f = u + iv$, $z_0 = x + iy$ και $\alpha = \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$. Τότε,

$$\alpha = \lim_{t \to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} = u_x(x, y).$$

Ομοίως,

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{t} = v_y(x,y).$$

Συνεπώς, η $u_x = v_y$ ικανοποιείται στο z_0. Θεωρούμε τώρα τη διεύθυνση $t+it$: Έχουμε

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0+t+it)-f(z_0)}{t+it}\right).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0+t+it)-f(z_0)}{t+it}\right)\\
&\quad= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((1-i)\frac{u(x+t,y+t)-u(x,y)}{t} + (1+i)\frac{v(x+t,y+t)-v(x,y)}{t}\right)\\
&\quad\longrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big((1-i)(u_x+u_y)+(1+i)(v_x+v_y)\Big) = \frac{u_x+u_y+v_x+v_y}{2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\alpha = \frac{u_x+u_y+v_x+v_y}{2} = \frac{2\alpha+u_y+v_x}{2},$$

απ' όπου παίρνουμε $u_y = -v_x$. Δείξαμε ότι οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο z_0, και αφού οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0), η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

2.14. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$ είναι αρμονικές στο ανοικτό $A \subseteq \mathbb{C}$. Ορίζουμε

$$U = u_x u_y + v_x v_y \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 - u_y^2 - v_y^2).$$

Αποδείξτε ότι η $F = U + iV$ είναι ολόμορφη στο A.

Υπόδειξη. Οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο A, οι οποίες ικανοποιούν τις $u_{xx}+u_{yy} = 0$ και $v_{xx}+v_{yy} = 0$. Έπεται, από τον ορισμό των U και V, ότι οι μερικές παράγωγοι U_x, U_y, V_x, V_y υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
U_x &= u_{xx}u_y + u_x u_{yx} + v_{xx}v_y + v_x v_{yx}\\
&= -u_{yy}u_y + u_x u_{yx} - v_{yy}v_y + v_x v_{yx}\\
&= u_x u_{xy} + v_x v_{xy} = u_y u_{yy} - v_y v_{yy} = V_y
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
U_y &= u_{xy}u_y + u_x u_{yy} + v_{xy}v_y + v_x v_{yy}\\
&= u_{xy}u_y - u_x u_{xx} + v_{xy}v_y - v_x v_{xx}\\
&= -(u_x u_{xx} + v_x v_{xx} - u_y u_{yx} - v_y v_{yx}) = -V_x.
\end{aligned}$$

Αφού οι U, V έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους που ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann, η $F = U + iV$ είναι ολόμορφη στο A.

2.15. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f = u + iv \in \mathcal{H}(A)$ με $u_x + v_y = 0$ στο A. Να δείξετε ότι υπάρχουν $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = icz + d, \quad z \in A.$$

Υπόδειξη. Αφού $f \in \mathcal{H}(A)$, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, οι οποίες σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι $u_x = -v_y$ μας δίνουν τις

$$u_x = 0, \qquad v_y = 0, \qquad u_y = -v_x.$$

Έπεται ότι

$$u(x,y) = g(y) + c_1, \quad v(x,y) = h(x) + c_2, \qquad u_y = -v_x.$$

Η τρίτη συνθήκη γράφεται ως $g'(y) = -h'(x)$, απ' όπου έπεται ότι $g'' = h'' \equiv 0$. Συνεπώς, υπάρχει $b \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(y) = b = -h'(x)$, και έπεται ότι

$$g(y) = by + c_3, \qquad h(x) = -bx + c_4$$

για κάποιες σταθερές $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $\gamma_1 = c_1 + c_3$ και $\gamma_2 = c_2 + c_4$ παίρνουμε

$$f = u + iv = (by + \gamma_1) + i(-bx + \gamma_2) = i(-b)(x + iy) + (\gamma_1 + i\gamma_2) = icz + d,$$

όπου $c = -b \in \mathbb{R}$ και $d = \gamma_1 + i\gamma_2 \in \mathbb{C}$.

2.16. Έστω $f(z) = z^3$, $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1).$$

Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα μέσης τιμής δεν ισχύει για τις μιγαδικές συναρτήσεις.

Υπόδειξη. Έχουμε $z_1 = e^{2\pi i/3}$ και $z_2 = e^{-2\pi i/3}$, συνεπώς $f(z_1) = f(z_2) = 1$. Αν υπάρχει z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$ τότε θα πρέπει να υπάρχει $z \in [z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε $f'(z) = 3z^2 = 0$, δηλαδή ο $z = 0$ να ανήκει στο $[z_1, z_2]$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: θα έπρεπε να υπάρχει $t \in [0,1]$ τέτοιος ώστε

$$z_1 + t(z_2 - z_1) = 0 \iff -1 + i\sqrt{3}(1 - 2t) = 0,$$

το οποίο θα έδινε $-1 = 0$.

2.17. (α) Έστω x_0 αρνητικός πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{w \to x_0} \operatorname{Log} w$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις ακολουθίες $z_n = |x_0|e^{i(\pi - 1/n)}$ και $w_n = |x_0|e^{i(-\pi + 1/n)}$. Παρατηρούμε ότι

$$z_n \to |x_0|e^{i\pi} = -|x_0| = x_0 \quad \text{και} \quad w_n \to |x_0|e^{-i\pi} = -|x_0| = x_0.$$

Όμως,

$$\operatorname{Log}(z_n) = \ln|x_0| + i\left(\pi - \frac{1}{n}\right) \to \ln|x_0| + i\pi$$

και

$$\operatorname{Log}(w_n) = \ln|x_0| + i\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) \to \ln|x_0| - i\pi \neq \ln|x_0| + i\pi,$$

άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{w \to x_0} \operatorname{Log} w$.

(β) Εάν $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ τότε η $g := \operatorname{Log}$ είναι ολόμορφη στο U και

$$u(x,y) = \ln|x + iy| = \operatorname{Re}(g).$$

Έστω ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\operatorname{Re}(f) = u$. Τότε, για κάθε $z = x + iy \in U$ έχουμε

$$\operatorname{Re}(g(z) - f(z)) = u(x,y) - u(x,y) = 0.$$

Αφού το U είναι τόπος, έπεται ότι

$$g(z) = f(z) + c, \qquad z \in U.$$

Θεωρούμε $x_0 < 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει το $\lim_{z\to x_0} f(z) = f(x_0)$. Ειδικότερα, υπάρχει το

$$\lim_{z\to x_0} \mathrm{Log}(z) = \lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U}} g(z) = \lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U}} f(z) + c = f(x_0) + c,$$

το οποίο είναι άτοπο από το (α).

2.18. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ και βρείτε ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(f) = u$ καθώς και τη συζυγή αρμονική v της u.

Υπόδειξη. Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}^2$. Υπολογίζουμε τις

$$u_x = -2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2) + 2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$$

και

$$u_y = -2xe^{-2xy}\sin(x^2-y^2) - 2ye^{-2xy}\cos(x^2-y^2),$$

και στη συνέχεια τις

$$u_{xx} = 4y^2e^{-2xy}\sin(x^2-y^2) - 8xye^{-2xy}\cos(x^2-y^2) - 4x^2e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$$

και

$$u_{yy} = 4x^2e^{-2xy}\sin(x^2-y^2) + 8xye^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + 4x^2e^{-2xy}\sin(x^2-y^2),$$

απ' όπου έπεται ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$, δηλαδή η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Τώρα γράφουμε

$$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0) = 2z\cos(z^2) - i2z\sin(z^2),$$

άρα

$$f(z) = \sin(z^2) + i\cos(z^2).$$

Για να βρούμε τη συζυγή αρμονική της u, κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
f(z) = f(x+iy) &= \sin(x^2-y^2+i2xy) + i\cos(x^2-y^2+i2xy)\\
&= \sin(x^2-y^2)\cosh(2xy) + i\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)\\
&\quad + i(\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) - i\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy))\\
&= (\cosh(2xy)+\sinh(2xy))\sin(x^2-y^2) + i(\cosh(2xy)+\sinh(2xy)\cos(x^2-y^2),
\end{aligned}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z)) = (\cosh(2xy) + \sinh(2xy)\cos(x^2-y^2).$$

2.19. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = ax^3y + 4xy^3 + x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u, καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = -i$. Να εκφράσετε την f ως συνάρτηση του $z = x + iy$.

Υπόδειξη. Έχουμε $u_{xx}+u_{yy} = 6axy+24xy$. Για να είναι αρμονική η u θα πρέπει να ικανοποιείται η $u_{xx}+u_{yy} = 0$, δηλαδή $6axy + 24xy = 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Έπεται ότι $a = -4$, και συνεπώς $u(x,y) = -4x^3y + 4xy^3 + x$. Τότε, υπάρχει συζυγής αρμονική της u στο $\mathbb{C}$ και η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ βλέπουμε ότι

$$v_y = -12x^2y + 4y^3 + 1.$$

Συνεπώς,

$$v(x, y) = -6x^2y^2 + y^4 + y + c(x).$$

Τώρα, από την εξίσωση Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ έχουμε

$$-12xy^2 + c'(x) = 4x^3 - 12xy^2,$$

δηλαδή $c'(x) = 4x^3$, και συμπεραίνουμε ότι $c(x) = x^4 + c$. Δηλαδή, $v(x, y) = -6x^2y^2 + y^4 + y + x^4 + c$, άρα

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z + i(z^4 + c)$$

για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Από την $f(0) = -i$ βλέπουμε ότι $c = -1$. Συνεπώς, τελικά,

$$f(z) = iz^4 + z - i.$$

2.20. Να βρεθεί η τιμή $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x, y) = y^3 + ax^2y + 2x^2 - 2y^2$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ με $f(i) = -1 - i$. Να εκφράσετε την f συναρτήσει του z.

Υπόδειξη. Έχουμε $u_{xx} + u_{yy} = (2ay + 4) + (6y - 4) = 2(a + 3)y$. Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, για να είναι αρμονική θα πρέπει να ικανοποιείται η $u_{xx} + u_{yy} = 0$, δηλαδή $2(a + 3)y = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έπεται ότι $a = -3$, και συνεπώς $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2$. Τότε, υπάρχει συζυγής αρμονική της u στο $\mathbb{C}$ και η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ βλέπουμε ότι

$$v_y = -6xy + 4x.$$

Συνεπώς,

$$v(x, y) = -3xy^2 + 4xy + c(x).$$

Τώρα, από την εξίσωση Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ έχουμε

$$3y^2 - 3x^2 - 4y = 3y^2 - 4y + c'(x),$$

δηλαδή $c'(x) = 3x^2$, και συμπεραίνουμε ότι $c(x) = x^3 + c$. Δηλαδή, $v(x, y) = -3xy^2 + 4xy + x^3 + c$, άρα

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = 2z^2 + i(z^3 + c)$$

για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Από την $f(i) = -1 - i$ βλέπουμε ότι $c = -1$. Συνεπώς, τελικά,

$$f(z) = iz^3 + 2z^2 - i.$$

2.21. Προσδιορίστε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Re} f(x, y) = u(x, y) = e^{-y} \cos x + 3x^2y - y^3$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, και $f(0) = 1 - i$.

Υπόδειξη. Έστω $f = u + iv$ με $u = e^{-y} \cos x + 3x^2y - y^3$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = -e^{-y} \sin x + 6xy,$$

άρα

$$v = e^{-y} \sin x + 3xy^2 + c(x).$$

Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$-e^{-y} \cos x + 3x^2 - 3y^2 = -e^{-y} \cos x - 3y^2 - c'(x),$$

άρα $c'(x) = -3x^2$, δηλαδή $c(x) = -x^3 + c$. Έπεται ότι $v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 + c$. Από την υπόθεση, $1 - i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + ic$, άρα $c = -1$, και τελικά

$$v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 - 1.$$

2.22. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

(α) $u(x,y) = -e^{-x}\sin y + \frac{y^2-x^2}{2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$.

(β) $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos(2x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 1$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $f = u + iv$ με $u = -e^{-x}\sin y + \frac{y^2-x^2}{2}$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = e^{-x}\sin y - x,$$

άρα

$$v = -e^{-x}\cos y - xy + c(x).$$

Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$-e^{-x}\cos y + y = -e^{-x}\cos y + y - c'(x),$$

άρα $c'(x) = 0$, δηλαδή $c(x) = c$. Έπεται ότι $v = -e^{-x}\cos y - xy + c$. Από την υπόθεση, $0 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = i(-1 + c)$, άρα $c = 1$, και τελικά

$$v(x,y) = -e^{-x}\cos y - xy + 1.$$

(β) Έστω $f = u + iv$ με $u = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos(2x)$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = 6xy - 2e^{2y}\sin(2x),$$

άρα

$$v = 3xy^2 - e^{2y}\sin(2x) + c(x).$$

Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$3(x^2 - y^2) + 2e^{2y}\cos(2x) = -3y^2 + 2e^{2y}\cos(2x) - c'(x),$$

άρα $c'(x) = -3x^2$, δηλαδή $c(x) = -x^3 + c$. Έπεται ότι $v = 3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin(2x) + c$. Από την υπόθεση, $1 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + i \cdot c$, άρα $c = 0$, και τελικά

$$v(x,y) = 3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin(2x).$$

2.23. Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u$ και $f(0) = i$.

Υπόδειξη. Έστω $f = u + iv$ με $u = e^{-y}\cos x + 3x^2y - y^3$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = 3x^2 - 6xy - 3y^2,$$

άρα

$$v = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + c(x).$$

Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$6xy - 3y^2 + c'(x) = 3x^2 + 6xy - 3y^2,$$

άρα $c'(x) = 3x^2$, δηλαδή $c(x) = x^3 + c$. Έπεται ότι $v(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + c$. Από την υπόθεση, $i = f(0) = u(0, 0) + iv(0, 0) = ic$, άρα $c = 1$, και τελικά

$$v = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + 1.$$

2.24. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y - \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και στη συνέχεια βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $f(1) = -1$.

Υπόδειξη. Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Υπολογίζουμε τις

$$u_x = -6xy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad u_{xx} = -6y + \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

και

$$u_y = 3y^2 - 3x^2 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad u_{yy} = 6y + \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$, άρα η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Έστω v η συζυγής αρμονική της u. Τότε, η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, άρα ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Από την $u_y = -v_x$ παίρνουμε

$$v_x = -3y^2 + 3x^2 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

συνεπώς,

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + \frac{y}{x^2 + y^2} + c(y).$$

Από την $u_x = v_y$ παίρνουμε τώρα

$$-6xy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -6xy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + c'(y),$$

άρα $c'(y) = 0$, και συμπεραίνουμε ότι $c(y) = c$. Τελικά,

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + \frac{y}{x^2 + y^2} + c,$$

και η ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι η

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = -\frac{1}{z} + i(z^3 + c).$$

Αφού $f(1) = -1$, λέπουμε ότι $c = -1$. Δηλαδή, $f(z) = -\frac{1}{z} + iz^3 - i$.

2.25. Να βρείτε τον μεγαλύτερο τόπο του $\mathbb{C}$ πάνω στο οποίο η συνάρτηση $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ είναι ολόμορφη.

Υπόδειξη. Η $\mathrm{Log}(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Συνεπώς, η $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ δεν είναι ολόμορφη στο z αν και μόνο αν ο $\frac{1+z}{1-z} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \leqslant 0$. Έχουμε $\frac{1+x}{1-z} \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$ ή ισοδύναμα $1 + z - \bar{z} - |z|^2 = 1 + \bar{z} - z - |z|^2$, δηλαδή $2i\mathrm{Im}(z) = z - \bar{z} = 0$. Συνεπώς, αν $z = x + iy = x$. Πρέπει επίσης να ισχύει ότι $\frac{1+x}{1-x} \leqslant 0$, δηλαδή $x \neq 1$ και $x^2 \geqslant 1$. Συνεπώς, τελικά, η $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$.

2.26. Να προσδιορίσετε τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{Log} z - i\frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη.

Υπόδειξη. Η $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ είναι παραγωγίσιμη στα $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Επίσης, για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ έχουμε

$$\varphi(z) = \mathrm{Log}\, z - i\frac{\pi}{2} = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z - i\frac{\pi}{2} = \ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}\, z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Η $z \mapsto f(z) = \mathrm{Log}\,(\varphi(z))$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα z για τα οποία $\varphi(z) \in (-\infty, 0]$, δηλαδή αν $\ln|z| \leqslant 0$ και $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{2}$, ή ισοδύναμα όταν $\ln|z| \leqslant 0$ και $z = iy$, $y \geqslant 0$. Δηλαδή, όταν $z = iy$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Αυτά είναι τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $[0, i]$.

Συνοψίζοντας, η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [0, i])$.

2.27. Έστω G τόπος στο $\mathbb{C}$. Να βρεθούν όλες οι ολόμορφες συναρτήσεις $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ στο G για τις οποίες ισχυει $v(x,y) = u^2(x,y)$ για κάθε $z = x+iy \in G$.

Υπόδειξη. Αν η f είναι ολόμορφη στο G, τότε ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Αν $v = u^2$, τότε αυτές γράφονται $u_x = 2uu_y$ και $u_y = -2uu_x$, ή ισοδύναμα, $u_x = 2uu_y$ και $u_y = -4u^2u_y$. Καταλήγουμε έτσι στις

$$u_x = 2uu_y \quad \text{και} \quad (1+4u^2)u_y = 0.$$

Έπεται ότι $u_y = 0$, και τελικά $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Συνεπώς, $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ για κάθε $z \in G$. Έπεται ότι οι u, v είναι σταθερές στο G. Αφού $v = u^2$, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) = t + it^2$.

2.28. Έστω $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρεθούν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $t = \sqrt{x^2+y^2}$ τότε

$$\varphi_x = \frac{x}{t}h'(t),\ \varphi_{xx} = \frac{x^2}{t^2}h''(t) + \frac{y^2}{t^3}h'(t) \quad \text{και} \quad \varphi_y = \frac{y}{t}h'(t),\ \varphi_{yy} = \frac{y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2}{t^3}h'(t).$$

Συνεπώς,

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{x^2+y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2+y^2}{t^3}h'(t) = h''(t) + \frac{1}{t}h'(t) = \frac{1}{t}(th''(t) + h'(t)).$$

Αν η φ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, έχουμε $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, δηλαδή

$$0 = th''(t) + h'(t) = (th'(t))' \quad \text{για κάθε} \ \ t > 0.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση βρίσκουμε $h(t) = c_1 \ln t + c_2$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η φ είναι της μορφής $\varphi(x,y) = c_1 \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + c_2$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.29. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος. Να δείξετε ότι:

(α) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$ τότε η f είναι σταθερή.

(β) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και η $|f|$ είναι σταθερή τότε η f είναι σταθερή.

(γ) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ και $f^5, \overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$ τότε η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. (α) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$ τότε οι $f = u + iv$ και $\overline{f} = u - iv$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann, άρα έχουμε

(i) $u_x = v_y$ και $u_x = -v_y$, που μας δίνουν $u_x = v_y = 0$,

(ii) $u_y = -v_x$ και $u_y = v_x$, που μας δίνουν $u_y = v_x = 0$.

Από τις $u_x = u_y = 0$ και $v_x = v_y = 0$ συμπεραίνουμε ότι οι u και v είναι σταθερές, άρα η $f = u + iv$ είναι σταθερή.

(β) Έχουμε $|f| = c$ στο A. Αν $c = 0$ τότε $|f| = 0 \implies f = 0$ στο A, δηλαδή η f είναι σταθερή. Αν η σταθερή τιμή της $|f|$ είναι $c > 0$, τότε από την $f \cdot \overline{f} = |f|^2 = c^2 > 0$ βλέπουμε ότι $f \neq 0$ στο A, άρα η $\frac{1}{f}$ είναι ολόμορφη στο A και συνεπώς η $\overline{f} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{f}$ είναι επίσης ολόμορφη στο A. Τότε, αφού $f, \overline{f} \in \mathcal{H}(A)$, από το (α) συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή.

(γ) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ και $f^5, \overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$ τότε $f^{10} = (f^5)^2 \in \mathcal{H}(A)$ και $\overline{f^{10}} = \overline{f}^{10} = (\overline{f}^2)^5 \in \mathcal{H}(A)$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η f^{10} είναι σταθερή, άρα η $|f|^{10}$ είναι σταθερή, άρα η $|f|$ είναι σταθερή και ίση με c.

Αν $c = 0$ τότε $f \equiv 0$, οπότε υποθέτουμε ότι $c > 0$. Τότε, $|f^5| = |f|^5 = c^5$ και αφού $f^5 \in \mathcal{H}(A)$ συμπεραίνουμε ότι η f^5 είναι σταθερή και ίση με $a \in \mathbb{C}$. Ομοίως, $|\overline{f}^2| = |f|^2 = c^2$ και αφού $\overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$ συμπεραίνουμε ότι η $\overline{f}^2$ είναι σταθερή και ίση με $b \in \mathbb{C}$, άρα $f^2 \equiv \overline{b}$. Τότε, από την $f^5 = (f^2)^2 \cdot f$ βλέπουμε ότι $a = (\overline{b})^2 f$ στο A, άρα η f είναι σταθερή και ίση με $a/(\overline{b})^2$ στο A.

2.30. Υποθέτουμε ότι η $f : G \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και ότι για κάθε $z \in G$ ισχύει ότι είτε $f(z) = 0$ ή $f'(z) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Η $g = f^2$ είναι ολόμορφη στον τόπο G και από την υπόθεση βλέπουμε ότι $g'(z) = 2f(z)f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Συνεπώς, η g είναι σταθερή στο G. Τότε, η $|g| = |f^2| = |f|^2$ είναι σταθερή στο G, άρα η $|f|$ είναι σταθερή στο G. Αυτό έχουμε δει ότι συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή στο G.

2.31. Υποθέτουμε ότι η $f : G \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και ότι η $g(z) = e^{f(z)}$ είναι σταθερή στο G. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Έχουμε $g'(z) = f'(z)e^{f(z)}$. Αφού η g είναι σταθερή έχουμε $g'(z) = 0$ στο G, και αφού η $e^{f(z)}$ δεν μηδενίζεται πουθενά συμπεραίνουμε ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Γνωρίζουμε τώρα ότι από αυτό έπεται ότι η f είναι σταθερή στο G.

2.32. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν η $f(z) = h^3(x, y) + ih(x, y)$ είναι ακέραια συνάρτηση, αποδείξτε ότι η h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Έχουμε $f = u + iv$, όπου $u = h^3$ και $v = h$. Αφού η f είναι ακέραια, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ παντού στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή

$$3h^2 h_x = h_y \quad \text{και} \quad 3h^2 h_y = -h_x.$$

Από αυτές παίρνουμε $3h^2(3h^2 h_x) = -h_x$, δηλαδή $(9h^4 + 1)h_x = 0$, άρα $h_x = 0$. Αυτή με τη σειρά της δίνει $h_y = 3h^2 h_x = 0$. Τότε, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ στο $\mathbb{C}$, και έπεται ότι $f'(z) = u_x + iv_x = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή.

2.33. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f \in \mathcal{H}(A)$. Να δείξετε ότι:

(α) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο μιας ευθείας του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

(β) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο ενός κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $f = u + iv$ και ότι το $f(A)$ είναι υποσύνολο μιας ευθείας του μιγαδικού επιπέδου. Τότε, υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$, με $a^2 + b^2 \neq 0$, ώστε $au(x, y) + bv(x, y) = c$ για κάθε $z = x + iy \in A$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$au_x + bv_x = 0 \qquad \text{και} \qquad au_y + bv_y = 0.$$

Αφού $f \in \mathcal{A}$, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $v_y = u_x$ και $v_x = -u_y$. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε το σύστημα (ως προς u_x, u_y)

$$au_x - bu_y = 0 \qquad \text{και} \qquad bu_x + au_y = 0,$$

το οποίο έχει ορίζουσα $a^2 + b^2 \neq 0$. ¶ρα, έχει μοναδική λύση $u_x = u_y = 0$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έπεται ότι $v_x = v_y = 0$. Τότε, οι u, v είναι σταθερές στο A, και συνεπώς η $f = u + iv$ είναι σταθερή.

(β) Υποθέτουμε ότι το $f(A)$ είναι υποσύνολο του κύκλου $C(a,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w-a| = r\}$ του μιγαδικού επιπέδου, όπου $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Θεωρούμε την $g(z) = f(z) - a$. Τότε, $g \in \mathcal{H}(A)$ και για κάθε $z \in A$ έχουμε $|g(z)| = |f(z) - a| = r$, δηλαδή η $|g|$ είναι σταθερή στο A. Έπεται ότι η g είναι σταθερή στο A, και συνεπώς η $f(z) = g(z) + a$ είναι επίσης σταθερή στο A.

2.34. Έστω $g : G \to \mathbb{C}$, $g = u + iv$, ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $u(x,y) - v(x,y) = c$ στο G, αποδείξτε ότι η g είναι σταθερή στο G.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε $u = v + c$. Αφού η g είναι ολόμορφη στο G, ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, δηλαδή $v_x = u_x = v_y$ και $v_y = u_y = -v_x$, απ' όπου παίρνουμε $v_x = y_y = 0$ και συνεπώς $u_x = u_y = 0$ στο G. Τότε, $g' = u_x + iv_x = 0$ παντού στο G, και έπεται ότι η g είναι σταθερή στο G.

2.35. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $|a| + |b| \neq 0$ ώστε $a\,\mathrm{Re} f(z) + b\,\mathrm{Im} f(z) + c = 0$ για κάθε $z \in U$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θέτουμε $u = \mathrm{Re}(f)$ και $v = \mathrm{Im}(f)$. Τότε, η υπόθεση $au + bv + c = 0$ μας δίνει

$$au_x + bv_x = 0 \quad \text{και} \quad au_y + bv_y = 0,$$

και από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann παίρνουμε το σύστημα

$$au_x + bv_x \quad \text{και} \quad a(-v_x) + bu_x = 0.$$

Αφού το σύστημα έχει μη μηδενική λύση (a, b) πρέπει η ορίζουσα του συστήματος $u_x^2 + v_x^2$ να μηδενίζεται, δηλαδή $u_x = v_x = 0$. Συνεπώς, $f' = u_x + iv_x = 0$ στο U, και έπεται ότι η f είναι σταθερή στο U.

2.36. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f, g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) = \lambda g(z)$ για κάθε $z \in U$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $h = f/g$. Αφού $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$, η h είναι ολόμορφη στο U. Επίσης, για κάθε $z \in U$ έχουμε

$$f(z)\overline{g(z)} = \overline{f(z)\overline{g(z)}} = \overline{f(z)}g(z),$$

δηλαδή $h(z) = \overline{h(z)}$. Έπεται ότι η $\overline{h}$ είναι επίσης ολόμορφη στο U.

Αφού οι $h, \overline{h}$ είναι ολόμορφες στο U, γνωρίζουμε ότι η h είναι σταθερή στο U. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $h(z) = \lambda$, και αφού $h = \overline{h}$ έχουμε $\lambda = \overline{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αφού $h = f/g$, αυτό σημαίνει ότι $f(z) = \lambda g(z)$ για κάθε $z \in U$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.37. Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στον τόπο $U \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$, τέτοια ώστε η συνάρτηση $u\overline{f}$ να είναι επίσης ολόμορφη. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Αφού η $u\overline{f} = u^2 - i(uv)$ είναι ολόμορφη, από την εξίσωση Cauchy-Riemann $(u^2)_x = (-uv)_y$ παίρνουμε

$$2uu_x = -u_y v - uv_y = v_x v - uu_x$$

χρησιμοποιώντας και τις $u_x = v_y$ και $v_x = -u_y$. Συνεπώς,

$$3uu_x - vv_x = 0.$$

Από την εξίσωση Cauchy-Riemann $(u^2)_y = (uv)_x$ παίρνουμε $2uux = u_x v + uv_x$, δηλαδή $-2uv_x = u_x v + uv_x$. Συνεπώς,

$$vu_x + 3uv_x = 0.$$

Για κάθε $(x, y) \in U$, η ορίζουσα του συστήματος

$$3u(x,y)\lambda - v(x,y)\mu = 0 \quad \text{και} \quad v(x,y)\lambda + 3u(x,y)\mu = 0$$

με αγνώστους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι $9u^2(x,y) + v^2(x,y) > 0$, αφού $f(x+iy) \neq 0$. Συνεπώς, το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Επομένως, $u_x = v_x = 0$ στο U. Έπεται ότι $f' = u_x + iv_x = 0$ στον τόπο U, άρα η f είναι σταθερή.

Κεφάλαιο 3

Μιγαδική ολοκλήρωση – Θεώρημα Cauchy και συνέπειές του

3.1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης:

(i) $\displaystyle\int_\gamma (3z^2 - 2z)\, dz, \quad \gamma(t) = t + it^2, \quad t \in [0,1].$

(ii) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Im}(z - i)\, dz, \quad \Gamma = \gamma + [i, -1], \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi/2].$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \cos z\, dz, \quad \gamma = \left[-\frac{\pi}{2} + i, \pi + i\right].$

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{Log} z}{z}\, dz, \quad \gamma = [1, i].$

(v) $\displaystyle\int_\gamma |z + 1|^2\, dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$

(vi) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z^2 e^z}\, dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$

Υπόδειξη. (i) Η $F(z) = z^3 - z^2$ είναι ακέραια συνάρτηση και $F'(z) = 3z^2 - 2z$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_\gamma (3z^2 - 2z)\, dz &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1+i) - F(0) = (1+i)^3 - (1+i)^2 \\ &= (1+i)^2(1 + i - 1) = 2i \cdot i = -2.\end{aligned}$$

(ii) Υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{Im}(z - i)\, dz &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{Im}(\cos t - i(1 - \sin t)) \cdot ie^{it}\, dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t) e^{it}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t)\cos t\, dt + i \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t)\sin t\, dt.\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin t)\cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\cos t - \frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \left(\sin t + \frac{\cos(2t)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

και

$$\int_0^{\pi/2}(1-\sin t)\sin t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sin t + \frac{\cos(2t)}{2} - \frac{1}{2}\right)dt$$
$$= \left(-\cos t + \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 1 + 0 - \frac{\pi}{4}.$$

Συνεπώς,

$$\int_\gamma \mathrm{Im}(z-i)\,dz = \frac{1}{2} + i\frac{4-\pi}{4}.$$

(iii) Αφού $(\sin z)' = \cos z$, έχουμε

$$\int_\gamma \cos z\,dz = \sin(\pi+i) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}+i\right).$$

Υπολογίζουμε τα

$$\sin(\pi+i) = \frac{e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}}{2i} = \frac{-e^{-1}+e}{2i}$$

και

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+i\right) = \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+i\right)} - e^{-i\left(-\frac{\pi}{2}+i\right)}}{2i} = \frac{-ie^{-1}+ie}{2i}.$$

Συνεπώς,

$$\int_\gamma \cos z\,dz = \frac{1+i}{2i}(e-e^{-1}).$$

(iv) Παρατηρούμε ότι $\gamma^* \subset U = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Η $F(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{Log}z)^2$ είναι ολόμορφη στο U και έχει παράγωγο

$$F'(z) = \frac{\mathrm{Log}z}{z}, \qquad z\in U.$$

Συνεπώς,

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}z}{z}\,dz = F(i) - F(1) = \frac{1}{2}(\mathrm{Log}i)^2 = \frac{1}{2}\big(\ln|i| + i\mathrm{Arg}(i)\big)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{8}.$$

(v) Εάν $z = e^{it}$ τότε $|z+1|^2 = (1+\cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1+\cos t)$. Γράφουμε

$$\int_\gamma |z+1|^2\,dz = \int_0^{2\pi} 2(1+\cos t)\cdot ie^{it}\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} 2(1+\cos t)\sin t\,dt + i\int_0^{2\pi} 2(1+\cos t)\cos t\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi}(2\sin t + \sin(2t))\,dt + i\int_0^{2\pi}(2\cos t + 1 + \cos(2t))\,dt$$
$$= 0 + i\cdot 2\pi = 2\pi i.$$

(vi) Παρατηρούμε ότι $\gamma^* \subset U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Για κάθε $z\in\gamma^*$ έχουμε $|z|=1$, άρα $\bar{z} = \frac{1}{z}$ και συνεπώς

$$\overline{z^2e^z} = \bar{z}^2e^{\bar{z}} = \frac{1}{z^2}e^{1/z} = F'(z),$$

όπου $F(z) = -e^{1/z}$, και η F είναι ολόμορφη στο U. Έπεται ότι

$$\int_\gamma \overline{z^2e^z}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z^2}e^{1/z}\,dz = -e^{1/z}\Big|_{z=1}^{z=-1} = -(e^{-1}-e) = e - \frac{1}{e}.$$

3.2. Αποδείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz\right| \leqslant \pi, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi]$$

και

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1}\right| \leqslant \frac{3\pi}{10}, \quad \text{όπου } \gamma(t) = 3e^{it},\ t \in [0,\pi/2].$$

Υπόδειξη. Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι αν $z = x + iy = e^{it}$ για κάποιο $t \in [0,\pi]$ τότε $y = \sin t \geqslant 0$, άρα $|e^{iz}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y} \leqslant 1$ και $|z| = 1$, συνεπώς

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2}\right| = |e^{iz}| \leqslant 1.$$

Αφού το μήκος της γ είναι ίσο με π (ημικύκλιο ακτίνας 1) από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz\right| \leqslant 1 \cdot \pi = \pi.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι αν $z \in \gamma$ τότε $z\bar{z} = |z|^2 = 9$, άρα

$$\frac{1}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} = \frac{z^2}{z^2 + 9z + 81},$$

και αφού $|z^2 + 9z + 81| \geqslant 81 - |z|^2 - 9|z| = 45$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left|\frac{1}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1}\right| = \frac{|z|^2}{|z^2 + 9z + 81|} \leqslant \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

Αφού το μήκος της γ είναι ίσο με $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1}\right| \leqslant \frac{1}{5} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10}.$$

3.3. Να δείξετε ότι $|\sin(z^2)| \leqslant e$ για $|z| = 1$ και ότι

$$\left|\int_\gamma e^{2\bar{z}} \sin(z^2)\, dz\right| \leqslant 2\pi e^3, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,2\pi].$$

Υπόδειξη. Αν $|z| = 1$ τότε

$$|\sin(z^2)| = \left|\frac{e^{iz^2} - e^{-iz^2}}{2i}\right| \leqslant \frac{|e^{iz^2}| + |e^{-iz^2}|}{2} \leqslant \frac{e^{|z|^2} + e^{|z|^2}}{2} = e.$$

Έχουμε επίσης $|e^{2\bar{z}}| \leqslant e^{2|\bar{z}|} = e^2$. Δηλαδή, αν $|z| = 1$ τότε

$$|e^{2\bar{z}} \sin(z^2)| = |e^{2\bar{z}}|\,|\sin(z^2)| \leqslant e^3,$$

και από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_\gamma e^{2\bar{z}} \sin(z^2)\, dz\right| \leqslant e^3 \cdot 2\pi = 2\pi e^3.$$

3.4. Αποδείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{2 + z^2}\, dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

όπου γ είναι το τόξο του κύκλου $|z| = 2$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Υπόδειξη. Για κάθε $z \in \gamma$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2+z^2}\right| = \frac{1}{|2+z^2|} \leqslant \frac{1}{|z|^2-2} = \frac{1}{2^2-2} = \frac{1}{2}.$$

Το μήκος του τόξου γ είναι ίσο με π, άρα η ML-ανισότητα δίνει

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{2+z^2}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

3.5. Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma z\cos(\pi i z)\,dz = \frac{2}{\pi^2},$$

όπου γ είναι η καμπύλη με εξίσωση $\gamma(t) = t - t^2 + it^3$, $t \in [0,1]$.

Υπόδειξη. Με «ολοκλήρωση κατά παράγοντες» μαντεύουμε ότι

$$z\cos(\pi i z) = -\frac{1}{\pi^2}(\cos(\pi i z) + \pi i z\sin(\pi i z))'.$$

Ορίζουμε

$$F(z) = -\frac{1}{\pi^2}(\cos(\pi i z) + \pi i z\sin(\pi i z))$$

και από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\int_\gamma z\cos(\pi i z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(i) - F(0) = -\frac{1}{\pi^2}\big[\cos(-\pi) - \cos 0\big] = \frac{2}{\pi^2}.$$

Δεύτερος τρόπος: Επειδή η συνάρτηση $f(z) = z\cos(\pi i z)$ είναι ακέραια, το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Μπορούμε λοιπόν να ολοκληρώσουμε την f στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,i]$, το οποίο έχει εξίσωση $z = iy$, $y \in [0,1]$. Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma z\cos(\pi i z)\,dz &= \int_{[0,i]} z\cos(\pi i z)\,dz = i\int_0^1 iy\cos(-\pi y)\,dy = -\int_0^1 y\cos(\pi y)\,dy\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\,dt = -\frac{1}{\pi^2}(t\sin t + \cos t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi^2}.\end{aligned}$$

3.6. Θεωρούμε την έλλειψη γ που δίνεται από την $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$

αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Η εξίσωση της έλλειψης γ είναι $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Έχουμε $\gamma'(t) = -a\sin t + ib\cos t$, άρα

$$\begin{aligned}
2\pi i = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + ib\cos t)(a\cos t - ib\sin t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \\
&= (b^2 = a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt.
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη βλέπουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

3.7. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^2}\,dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$, $R > 0$.

Υπόδειξη. Έστω $R > 1$ και $z = x + iy \in \gamma_R^*$. Αφού $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$ έχουμε $x, y \geqslant 0$. Από την $iz^2 = i(x^2 - y^2 + 2ixy) = -2xy + i(x^2 - y^2)$ βλέπουμε ότι

$$|e^{iz^2}| = e^{\mathrm{Re}(iz^2)} = e^{-2xy} \leqslant 1.$$

Επιπλέον $|z| = R$, άρα $|z^2 + 1| \geqslant |z|^2 - 1 = R^2 - 1$. Δηλαδή,

$$\left|\frac{e^{iz^2}}{1+z^2}\right| \leqslant \frac{|e^{iz^2}|}{|z|^2 - 1} \leqslant \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^2}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{R^2-1}\cdot\frac{\pi R}{2} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to +\infty$.

3.8. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(z_1) \leqslant 0$ και $\mathrm{Re}(z_2) \leqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\int_{[z_1,z_2]} e^z\,dz = \int_{[z_1,z_2]} (e^z)'\,dz = e^z\Big|_{z_1}^{z_2} = e^{z_2} - e^{z_1}.$$

Αν $z \in [z_1, z_2]$ τότε υπάρχει $t \in [0,1]$ ώστε $z = (1-t)z_1 + tz_2$, και αφού $\mathrm{Re}(z_1) \leqslant 0$ και $\mathrm{Re}(z_2) \leqslant 0$ βλέπουμε ότι $\mathrm{Re}(z) = (1-t)\mathrm{Re}(z_1) + t\mathrm{Re}(z_2) \leqslant 0$. Έπεται ότι

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leqslant 1$$

Από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| = \left|\int_{[z_1,z_2]} e^z\,dz\right| \leqslant 1\cdot|z_1 - z_2|.$$

3.9. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Im}(z_0) < 0$. Έστω επίσης $R > 0$ και γ_R το ημικύκλιο με $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

(α) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} = \pi i.$$

(β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t-z_0}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $R > |z_0|$. Για κάθε $z \in \gamma_R^*$ έχουμε

$$|z(z-z_0)| = |z| \cdot |z-z_0| \geqslant |z| \cdot (|z| - |z_0|) = R \cdot (R - |z_0|).$$

Έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{z(z-z_0)}\right| \leqslant \frac{1}{R(R-|z_0|)}.$$

Από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)}\right| \leqslant \frac{1}{R(R-|z_0|)} \cdot \pi R = \frac{\pi}{R-|z_0|} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to \infty$. Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι

$$\frac{z_0}{z(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z},$$

άρα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z} + z_0 \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)}.$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$\lim_{R\to+\infty} z_0 \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)} = z_0 \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)} = 0.$$

Επίσης,

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\, dt = \pi i.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} = \pi i.$$

(β) Αν $R > |z_0|$ τότε αφού $\mathrm{Im}(z_0) < 0$ έχουμε ότι το z_0 είναι στο εσωτερικό της κλειστής, τμηματικά λίας καμπύλης $\delta_R = \gamma_R \cup [R, -R]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta_R} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.$$

Δηλαδή,

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} - \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t-z_0} = 2\pi i.$$

Από το (α) έχουμε $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} = \pi i$, άρα

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t-z_0} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} - 2\pi i = -\pi i.$$

3.10. Αποδείξτε ότι

$$\int_{[-R,R]\cup\gamma_R} |z|\overline{z}\,dz = R^3\pi i,$$

όπου γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο το 0, ακτίνα $R > 0$ και θετική φορά διαγραφής.

Υπόδειξη. Η παραμετρική εξίσωση του ημικυκλίου γ_R είναι $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, άρα

$$\begin{aligned}\int_{[-R,R]\cup\gamma_R} |z|\overline{z}\,dz &= \int_{[-R,R]} |z|\overline{z}\,dz + \int_{\gamma_R} |z|\overline{z}\,dz \\ &= \int_{-R}^{R} |x|x\,dx + \int_0^{\pi} R^2 e^{-it}\cdot iRe^{it}\,dt = 0 + i\int_0^{\pi} R^3 dt = R^3\pi i.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με 0 διότι η $x \mapsto |x|x$ είναι περιττή συνάρτηση στο $[-R, R]$.

3.11. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f, g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ απλή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Εάν $z_0 = \gamma(a)$, $z_1 = \gamma(b)$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma f'(z)g(z)\,dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_\gamma f(z)g'(z)\,dz.$$

Υπόδειξη. Η $h = f \cdot g$ είναι ολόμορφη στο U και $h' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Επομένως,

$$\int_\gamma f'(z)g(z)\,dz + \int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = \int_\gamma h'(z)\,dz = h(z_1) - h(z_2) = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0).$$

3.12. Δίνεται η καμπύλη $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, όπου $r > 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_r} \mathrm{Re}(z)\,dz.$$

Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{Re}(z)$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.

Υπόδειξη. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δίνει

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} \mathrm{Re}(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(re^{it}) ire^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} (r\cos t) ir(\cos t + i\sin t)\,dt \\ &= ir^2\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + i\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\,dt\right) = ir^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= i\pi r^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Έστω τώρα U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0 και ας υποθέσουμε ότι η $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ έχει παράγουσα στο U. Αφού το U είναι ανοικτό και $0 \in U$, μπορούμε να βρούμε $r > 0$ ώστε $\gamma_r^* \subset U$, όπου $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Η γ_r είναι κλειστή, άρα

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο από τον προηγούμενο υπολογισμό.

3.13. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dt}\left[\,|\varphi(t)|^2\,\right] = 2\mathrm{Re}\left[\,\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\right]$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

(β) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και γ απλή, κλειστή, λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}\, dz$$

είναι φανταστικός αριθμός.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, όπου οι $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες. Από την $|\varphi(t)|^2 = \varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}[\, |\varphi(t)|^2\,] = 2\varphi_1(t)\varphi_1'(t) + 2\varphi_2(t)\varphi_2'(t).$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\varphi'(t)\overline{\varphi(t)} &= (\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))(\varphi_1(t) - i\varphi_2(t))\\ &= (\varphi_1(t)\varphi_1'(t) + \varphi_2(t)\varphi_2'(t)) + i(\varphi_2'(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)),\end{aligned}$$

άρα

$$2\mathrm{Re}[\, \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\,] = 2\varphi_1(t)\varphi_1'(t) + 2\varphi_2(t)\varphi_2'(t).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}[\, |\varphi(t)|^2\,] = 2\mathrm{Re}[\, \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}].$$

(β) Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ απλή, κλειστή, λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ με $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Γράφουμε

$$\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}\, dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\overline{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[\, f(\gamma(t))\,] \cdot \overline{f(\gamma(t))}\, dt = \int_a^b \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\, dt,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}\, dz\right) = \int_a^b \mathrm{Re}[\, \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\,]\, dt.$$

Από το (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}\, dz\right) &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\, |\varphi(t)|^2\,]\, dt = \frac{1}{2}(|\varphi(b)|^2 - |\varphi(a)|^2)\\ &= \frac{1}{2}(|f(\gamma(b))|^2 - |f(\gamma(a))|^2) = 0,\end{aligned}$$

αφού $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(α) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$.

(β) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $R > 1$ και $z = x + iy \in \gamma_R^*$. Αφού $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ έχουμε $y \geqslant 0$. Από την $iz = -y + ix$ βλέπουμε ότι

$$|e^{iz}| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-y} \leqslant 1.$$

Επιπλέον $|z| = R$, άρα $|z^2 + 1| \geqslant |z|^2 - 1 = R^2 - 1$. Δηλαδή,

$$\left|\frac{e^{iz}}{1 + z^2}\right| \leqslant \frac{|e^{iz}|}{|z|^2 - 1} \leqslant \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2}\, dz\right| \leqslant \frac{1}{R^2 - 1} \cdot \pi R \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to +\infty$.

(β) Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$, $R > 0$. Εάν $R > 1$ τότε το i βρίσκεται στο εσωτερικό της Γ_R, άρα από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2}\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}/(z + i)}{z - i}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{iz}}{z + i}\Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Τώρα γράφουμε

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2}\, dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{\cos x + i \sin x}{1 + x^2}\, dx.$$

Αφήνοντας το $R \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx,$$

και έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}.$$

3.15. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1 - z)^2}\, dz,$$

όπου

(α) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(β) $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. (α) Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για την $f(z) = e^z/(1 - z)^2$ έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1 - z)^2}\, dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

(β) Το 1 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους για την $g(z) = e^z/z$ έχουμε

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1 - z)^2}\, dz = 2\pi i g'(1) = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z(z - 1)}{z^2}\right)\Big|_{z=1} = 0.$$

3.16. Να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \frac{\pi}{3},$$

ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $1/z$ πάνω στην έλλειψη $\gamma(t) = 2\cos t + 3i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Γράφουμε

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}}{|\gamma(t)|^2} dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|\gamma(t)|^2 = 4\cos^2 t + 9\sin^2 t$$

και

$$\gamma'(t)\overline{\gamma(t)} = (-2\sin t + 3i\cos t)(2\cos t - 3i\sin t) = 5\sin t\cos t + 6i.$$

Έπεται ότι

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{5\sin t\cos t}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} dt + 6i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}.$$

Από αυτή την ισότητα έπεται ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{5\sin t\cos t}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} dt = 0$$

και

$$6\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 2\pi.$$

Η τελευταία ισότητα δίνει το ζητούμενο.

3.17. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, $|z_0| < 1$ και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Να δείξετε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1 - |z_0|^2} \int_\gamma f(z) \frac{1 - z\overline{z_0}}{z - z_0} dz$$

και

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - |z_0|^2} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\, dt.$$

Υπόδειξη. Η $g(z) = f(z)(1 - z\overline{z_0})$ είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον $\overline{D}$ και το z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για την g βλέπουμε ότι

$$\int_\gamma f(z) \frac{1 - z\overline{z_0}}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot g(z_0) = 2\pi i \cdot f(z_0)(1 - |z_0|^2),$$

δηλαδή

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1 - |z_0|^2} \int_\gamma f(z) \frac{1 - z\overline{z_0}}{z - z_0} dz.$$

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε αρχικά ότι αν $|z| = 1$ τότε $|1 - z\overline{z_0}| = |z - z_0|$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z) \frac{1 - z\overline{z_0}}{z - z_0} dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - e^{it} z_0}{e^{it} - z_0} \cdot ie^{it}\, dt \right| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \frac{|1 - e^{it} z_0|}{|e^{it} - z_0|} \cdot |ie^{it}|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\, dt,
\end{aligned}$$

και παίρνοντας μέτρα στην ισότητα του πρώτου ερωτήματος έχουμε το ζητούμενο.

3.18. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(α) Να δείξετε ότι
$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\overline{f'(0)}.$$

(β) Να υπολογίσετε το
$$\int_\gamma \overline{z\cos z}\,dz.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε
$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} \overline{e^{-it}f(e^{it})}\,dt = i\overline{\int_0^{2\pi} e^{-it}f(e^{it})\,dt}.$$

Όμως,
$$\int_0^{2\pi} e^{-it}f(e^{it})\,dt = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{(e^{it})^2} ie^{it}\,dt = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \frac{1}{i}2\pi i f'(0) = 2\pi f'(0).$$

Συνεπώς,
$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = i\overline{2\pi f'(0)} = 2\pi i\overline{f'(0)}.$$

(β) Η συνάρτηση $f(z) = z\cos z$ είναι ακέραια, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του (α). Έχουμε $f'(z) = \cos z - z\sin z$, άρα $f'(z) = 1$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι
$$\int_\gamma \overline{z\cos z}\,dz = \int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\overline{f'(0)} = 2\pi i.$$

3.19. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$, $R > 0$. Εάν $f(z_0) = 0$ για κάποιο z_0 με $|z_0| < R$, να δείξετε ότι
$$|f(0)| \leqslant \frac{M_R|z_0|}{R - |z_0|},$$

όπου $M_R = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε
$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z}\,dz \quad \text{και} \quad 0 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Έπεται ότι
$$\begin{aligned}|f(0)| = |f(0) - f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R}\left(\frac{f(z)}{z} - \frac{f(z)}{z - z_0}\right)dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - z_0}\right)dz\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|-z_0\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\,dz\right| = \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\,dz\right|.\end{aligned}$$

Όμως, για κάθε $z \in \gamma_R^*$ έχουμε $|f(z)| \leqslant M_R$ και $|z(z - z_0)| = R \cdot |z - z_0| \geqslant R(|z| - |z_0|) = R(R - |z_0|)$, άρα
$$\left|\frac{f(z)}{z(z - z_0)}\right| \leqslant \frac{M_R}{R(R - |z_0|)}.$$

Από την ML-ανισότητα έπεται ότι
$$|f(0)| = \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\,dz\right| \leqslant \frac{|z_0|}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M_R}{R(R - |z_0|)} = \frac{M_R|z_0|}{R - |z_0|}.$$

3.20. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geqslant 2$ με μεγιστοβάθμιο όρο $a_n z^n$.

(α) Να δείξετε ότι

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0.$$

Συμπεράνατε ότι υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιος ώστε, για $|z| > R_0$,

$$|P(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$

(β) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{P(z)}\, dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$.

(γ) Εάν γ είναι μια απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη που περικλείει όλες τις ρίζες του $P(z)$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{P(z)}\, dz = 0.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, οπότε

$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \frac{1}{z^{n-k}} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \left(\frac{1}{|z|} \right)^{n-k} \longrightarrow 0$$

καθώς $|z| \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0,$$

και επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε $R_0 > 0$ ώστε αν $|z| > R_0$ να ισχύει

$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| < \frac{1}{2} \implies \frac{|P(z)|}{|a_n z^n|} \geqslant 1 - \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| > \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$|P(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$

(β) Αν $R > R_0$ τότε για κάθε $z \in \gamma_R^*$ έχουμε $|P(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n = \frac{|a_n|}{2}R^n$, άρα

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leqslant \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{R^n}.$$

Από την ML-ανισότητα,

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{P(z)} \right| \leqslant \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{R^n} \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{|a_n|} \left(\frac{1}{R} \right)^{n-1} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to \infty$, διότι $n \geqslant 2$. Συνεπώς,

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{P(z)}\, dz \right| = 0.$$

(γ) Υπάρχει $R_1 > 0$ ώστε $\gamma^* \subset \mathrm{int}(\gamma_{R_1}^*)$, όπου $\gamma_{R_1}(t) = R_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Για κάθε $R > R_1$ έχουμε $\gamma^* \subset \mathrm{int}(\gamma_{R_1}^*) \subset \mathrm{int}(\gamma_R^*)$ και το χωρίο U μεταξύ των γ^*, γ_R^* δεν περιέχει ρίζες του $P(z)$, δηλαδή δεν περιέχει ανώμαλα σημεία της $1/P(z)$. Η $1/P$ είναι ολόμορφη στο U, άρα

$$\int_\gamma \frac{dz}{P(z)} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{P(z)}$$

για κάθε $R > R_1$. Αφήνοντας το $R \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{P(z)} \to 0, \quad \text{άρα} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{P(z)} = 0.$$

3.21. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0, καθώς και την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης,όπου:

(α) $f(z) = 1 - \frac{2}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}$, $z_0 = i$.

(β) $f(z) = (\cos z)^2$, $z_0 = \pi$.

Υπόδειξη. (α) Αν $|z-i| < \sqrt{2} = |1+i|$, γράφουμε

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(1+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

Τότε,

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \left(\frac{1}{1+z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1+i)}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

Επομένως,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2(-1)^n + (-1)^n(1+i)}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n = \frac{2i}{1+i} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1+i)}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

(β) Γράφουμε $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2z)$. Θέτοντας $w = z - \pi$ έχουμε

$$\cos(2z) = \cos(2\pi + 2w) = \cos(2w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2w)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}w^{2n}.$$

Έπεται ότι

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}w^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2(2n)!}(z-\pi)^{2n}.$$

3.22. (α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f_1(z) = \frac{z^2+6z}{(2-z)(z+2)^2} = \frac{1}{2-z} - \frac{2}{(z+2)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_1 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0 = 0$, καθώς και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2+4z-3i}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_2 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0 = -2$, καθώς και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

για $|z/2| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| < 2$.

Παραγωγίζοντας την $\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)w^n.$$

Συνεπώς,

$$-\frac{2}{(z+2)^2} = \frac{1}{2(1+z/2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

για $|z/2| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| < 2$.

Τελικά, για $|z| < 2$ έχουμε

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}[1+(-1)^{n+1}(n+1)]z^n,$$

και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$.

(β) Γράφουμε

$$f_2(z) = \frac{1}{(z+2)^2-(4+3i)} = \frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+2)^2}{4+3i}}$$
$$= -\frac{1}{4+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+2)^2}{4+3i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4+3i)^{n+1}}(z+2)^n,$$

για τα $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την $|z+2|^2 < |4+3i| = 5$ ή ισοδύναμα $|z-(-2)| < \sqrt{5}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \sqrt{5}$.

3.23. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{2}(e^{z^2} - e^{-z^2})$ γύρω από το σημείο $z_0 = 0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(23)}(0)$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$f(z) = \frac{z}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n!}z^{2n+1}.$$

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι

$$\frac{f^{(23)}(0)}{23!} = \frac{1+(-1)^{11}}{2\cdot 11!} = 0,$$

άρα $f^{(23)}(0) = 0$.

3.24. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^5}{1+z^4}$ γύρω από το σημείο $z_0 = 0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(21)}(0)$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $w = -z^4$ και για $|z| < 1$ έχουμε $|w| < 1$, άρα

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty}w^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n}.$$

Έπεται ότι

$$f(z) = z^5\sum_{n-0}^{\infty}z^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n+5}.$$

Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής του z^k στο ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το 0 ισούται με $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Παρατηρούμε ότι $4n+5 = 21$ αν $n = 4$, δηλαδή ο συντελεστής του z^{21} είναι ίσος με $(-1)^4 = 1$, άρα

$$\frac{f^{(21)}(0)}{21!} = 1 \implies f^{(21)}(0) = 21!.$$

3.25. Για $|z| < 1$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ για $|z| < 1$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \implies \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

για $|z| < 1$. Παραγωγίζοντας και πάλι, έχουμε

$$\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1},$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

για $|z| < 1$.

3.26. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^{10}}{1+z^{20}}$. Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(50)}(0)$ και $f^{(100)}(0)$.

Υπόδειξη. Για $|z| < 1$ θέτουμε $w = z^{10}$, οπότε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{w}{1+w^2} = w \cdot \frac{1}{1-(-w^2)} = w \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{20n+10}. \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του z^{50} είναι $(-1)^2 = 1$ (για $n = 2$), άρα

$$f^{(50)}(0) = 50! \cdot 1 = 50!.$$

Ο συντελεστής του z^{100} είναι 0 (διότι δεν υπάρχει $n \geqslant 0$ ώστε $2n + 10 = 100$), άρα

$$f^{(100)}(0) = 100! \cdot 0 = 0.$$

3.27. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$. Να δείξετε ότι η F είναι ολόμορφη στον δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και ότι $F(z) = \text{Log}(1 + z)$ για κάθε $z \in D$.

Υπόδειξη. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ είναι ίση με

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|(-1)^n/n|}} = \frac{1}{1/\lim \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Έπεται ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στον ανοικτό δίσκο D, άρα η F είναι ολόμορφη στον D.

Για κάθε $z \in D$ έχουμε

$$F'(z) = -\sum_{n=1}^{n} \frac{nz^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η $z \mapsto \text{Log}(1 + z)$ είναι ολόμορφη στον D, διότι αν $|z| < 1$ τότε

$$\text{Re}(1 + z) = 1 + \text{Re}(z) \geqslant 1 - |z| > 0,$$

δηλαδή $1 + z \notin \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Επίσης, για κάθε $z \in D$ έχουμε

$$F'(z) = \frac{1}{1+z} = (\text{Log}(1_z))'$$

και $F(0) = 0 = \mathrm{Log}(1+0)$. Έπεται ότι $F(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ για κάθε $z \in D$.

3.28. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)^2}{(e^z - 1 - z)\sin^2 z} \quad \text{και} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(2z)}{(e^{2iz}-1)\sin z}.$$

Υπόδειξη. Για το πρώτο όριο παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{(1-\cos z)^2}{(e^z-1-z)\sin^2 z} &= \frac{(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots)^2}{(z^2/2! + z^3/3! + z^4/4! + \cdots)(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)^2} \\ &= \frac{z^4(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots)^2}{z^4(1/2! + z/3! + z^2/4! + \cdots)(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)^2} \\ &= \frac{(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots)^2}{(1/2! + z/3! + z^2/4! + \cdots)(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)^2}, \end{aligned}$$

άρα

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{(1/2!)^2}{1/2! \cdot 1^2} = \frac{1}{2}.$$

Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1-\cos(2z)}{(e^{2iz}-1)\sin z} \\ &= \frac{2^2z^2/2! - 2^4z^4/4! + 2^6z^6/6! - \cdots}{(2iz + (2iz)^2/2! + (2iz)^3/3! + (2iz)^4/4! + \cdots)(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)} \\ &= \frac{z^2(2^2/2! - 2^4z^2/4! + 2^6z^4/6! - \cdots)}{2iz^2(1 + (2iz)/2! + (2iz)^2/3! + (2iz)^3/4! + \cdots)(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)} \\ &= \frac{1}{2i}\,\frac{2^2/2! - 2^4z^2/4! + 2^6z^4/6! - \cdots}{(1 + (2iz)/2! + (2iz)^2/3! + (2iz)^3/4! + \cdots)(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)}, \end{aligned}$$

άρα

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2^2}{2!} = \frac{1}{i} = -i.$$

3.29. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(α) $f^{(n)}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι αν g είναι ακέραια συνάρτηση και $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ τότε $g'(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Από αυτόν τον ισχυρισμό θα προκύψει το (α) με επαγωγή ως προς n.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αφού η g είναι διαφορίσιμη στο x_0, έχουμε

$$g'(x_0) = \lim_{z\to x_0} \frac{g(z)-g(x_0)}{z-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

διότι $g(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (και, φυσικά, $g(x_0) \in \mathbb{R}$).

Τώρα, έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Για $n = 0$ έχουμε $f^{(0)}(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $f^{(n)}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $g := f^{(n)}$ είναι ακέραια και $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, άρα

$$f^{(n+1)}(\mathbb{R}) = g'(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$$

από τον ισχυρισμό. Από την αρχή της επαγωγής παίρνουμε το (α).

(β) Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}.$$

Από το (α) έχουμε $f^{(n)}(0)\in\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\overline{f(z)}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}\overline{z}^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\overline{z}^n=f(\overline{z})$$

για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

3.30. Αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$, αποδείξτε ότι

$$\int_{|z|=1}\overline{f(z)}\,dz=2\pi i\cdot\overline{f'(0)}$$

και

$$\int_{|z|=1}z\cdot\overline{f(z)}\,dz=\pi i\cdot\overline{f''(0)}.$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ισότητα γράφουμε

$$\int_{|z|=1}\overline{f(z)}\,dz=\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{it})}ie^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}\overline{e^{-it}f(e^{it})}\,dt=i\,\overline{\int_0^{2\pi}e^{-it}f(e^{it})\,dt}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{2\pi}e^{-it}f(e^{it})\,dt=\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{(e^{it})^2}ie^{it}\,dt=\frac{1}{i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z^2}\,dz=\frac{1}{i}2\pi if'(0)=2\pi f'(0),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\gamma\overline{f(z)}\,dz=i\overline{2\pi f'(0)}=2\pi i\overline{f'(0)}.$$

Για τη δεύτερη ισότητα γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}z\cdot\overline{f(z)}\,dz&=\int_0^{2\pi}e^{it}\cdot\overline{f(e^{it})}\,ie^{it}dt=\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{it})}\,ie^{2it}dt=-\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{it})ie^{-2it}}\,dt\\&=-\overline{\left(\int_0^{2\pi}f(e^{it})\,ie^{-2it}dt\right)}=-\overline{\left(\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{3it}}\,ie^{it}dt\right)}=-\overline{\left(\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^3}\,dz\right)}\\&=\frac{2\pi i}{2!}\overline{\frac{2!}{2\pi i}\left(\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^3}\,dz\right)}=\pi i\overline{f''(0)},\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους.

3.31. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(nz)|\leqslant n|f(z)| \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C} \text{ και } n\in\mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $f''(z)=0$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και συμπεράνατε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1.

Υπόδειξη. Έστω $z_0\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma_n(t)=z_0+ne^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f''(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz.$$

Εάν $M = \max_{|w|=1} |f(w)|$, τότε, από την υπόθεση, για κάθε $z \in \gamma_n^*$ έχουμε

$$|f(z)| = \left|f\left(n\frac{z}{n}\right)\right| \leqslant n\left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leqslant nM,$$

και $|z - z_0| = n$, οπότε η ML-ανισότητα μας δίνει

$$|f''(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi n \cdot \frac{nM}{n^3} = \frac{M}{n} \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$. Έπεται ότι $f''(z_0) = 0$.

Το $z_0 \in \mathbb{C}$ ήταν τυχόν, άρα $f'' \equiv 0$, άρα υπάρχει σταθερά $a \in \mathbb{C}$ ώστε $f'(z) = a \in \mathbb{C}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε, για την $g(z) = f(z) - az$ έχουμε $g' \equiv 0$, άρα υπάρχει σταθερά $b \in \mathbb{C}$ ώστε $g(z) = b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή $f(z) = az + b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δηλαδή, η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1.

3.32. Έστω f ακέραια συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy αποδείξτε ότι

$$\int_{C(0,4)} \frac{f(z)}{z^2 + z - 6}\, dz = \frac{2\pi i}{5}(f(2) - f(-3)),$$

όπου $C(0, 4)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 4.

Υπόδειξη. Αν $\gamma = C(0, 4)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 + z - 6}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-2)(z+3)}\, dz \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z+3}\, dz\right) \\ &= \frac{1}{5}(f(2) - f(-3))\end{aligned}$$

από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, συνεπώς

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2 + z - 6}\, dz = \frac{2\pi i}{5}(f(2) - f(-3)).$$

3.33. Αν η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης γ είναι $z(\theta) + 1 = 2e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$, χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z-4}{z^2(z-2)^3}\, dz = \frac{15}{8}.$$

Υπόδειξη. Η καμπύλη γ είναι κύκλος με κέντρο το $(-1, 0)$ και ακτίνα 2. Ο κύκλος περιστρέφεται τρεις φορές γύρω από το 0 με θετική φορά, άρα ο δείκτης στροφής της γ ως προς το 0 είναι $I(\gamma, 0) = 3$. Επειδή το σημείο 2 βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z-4}{z^2(z-2)^3}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-4)/(z-2)^3}{z^2}\, dz \\ &= I(\gamma, 0)\left(\frac{z-4}{(z-2)^3}\right)'\Big|_{z=2} \\ &= 3\frac{-2z+10}{(z-2)^4}\Big|_{z=0} = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

3.34. Έστω G τόπος που περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $g : G \to \mathbb{C}$

αναλυτική. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant 2$ α ισχύει

$$\int_{|z|=1} \frac{g(z)}{(nz-1)^{k+1}}\, dz = 0.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$ στο G.

Υπόδειξη. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους και από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(k)}\left(\tfrac{1}{n}\right) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{(z-1/n)^{k+1}}\, dz \\ &= n^{k+1} \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{(nz-1)^{k+1}}\, dz = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $n \geqslant 2$. Η $g^{(k)}$ είναι αναλυτική στο G και για την ακολουθία $\frac{1}{n} \to 0$ έχουμε $g^{(k)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \geqslant 2$, άρα $g^{(k)}(0) = 0$ από την αρχή της μεταφοράς. Έπεται ότι το 0 είναι μη μεμονωμένο σημείο του συνόλου ριζών της $g^{(k)}$, άρα $g^{(k)} \equiv 0$ στον τόπο G. Αυτό συνεπάγεται ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$ στο G.

3.35. Να υπολογίσετε το ολοκληρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1},$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $R > 1$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την απλή κλειστή, τμηματικά λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [Ri, -Ri]$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2-1}\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\, dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{z+1}\right|_{x=1} = \pi i.$$

Γράφουμε

$$\pi i = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2-1}\, dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1}\, dz + \int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1}\, dz.$$

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\int_{[Ri,-Ri]} \frac{1}{z^2-1}\, dz = -\int_{[-Ri,Ri]} \frac{1}{z^2-1}\, dz = -\int_{-R}^{R} \frac{i\,dt}{(it)^2-1} = i\int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2+1} = 2i\mathrm{Arctan}(R).$$

Συνεπώς,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-1}\, dz = i(\pi - 2\mathrm{Arctan}(R)).$$

3.36. (α) Αν $\sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$, να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

(β) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα Cauchy αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αν $z = \sigma_R(t) = R + it$ τότε

$$z^2 = R^2 - t^2 + 2iRt \quad \text{και} \quad e^{iz^2} = e^{-2Rt} \cdot e^{i(R^2-t^2)}.$$

Συνεπώς,

$$\left|\int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|i\int_0^R e^{-2Rt}\cdot e^{i(R^2-t^2)}dt\right| \leqslant \int_0^R \left|e^{-2Rt}\cdot e^{i(R^2-t^2)}\right| dt$$
$$= \int_0^R e^{-2Rt}dt = \frac{1}{2R}(1-e^{-2R^2}) \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to +\infty$.

(β) Για $R > 0$ θεωρούμε την κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη

$$\Gamma_R = [0,R] + \sigma_R - \gamma_R, \qquad \gamma_R(t) = t + it, \quad t \in [0,R],$$

δηλαδή το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$. Από το θεώρημα Cauchy έχουμε

$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{it^2}dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz - \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz,$$

δηλαδή

$$\int_0^R e^{it^2}dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz.$$

Για $z = \gamma_R(t) = t + it$, $t \in [0,R]$, έχουμε

$$iz^2 = it^2(1+i)^2 = -2t^2,$$

άρα

$$\int_0^R e^{it^2}dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz = (1+i)\int_0^R e^{-2t^2}dt.$$

Αφήνοντας το $R \to +\infty$ και χρησιμοποιώντας το (α) βλέπουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt = (1+i)\int_0^{+\infty} e^{-2t^2}dt.$$

Αφού $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$, εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη παίρνουμε το ζητούμενο.

3.37. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ που ικανοποιεί την $|f(z)| \leqslant e^{-1/|z|}$ για κάθε $z \in D \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\frac{e^{-1/r}}{r^n}$$

για κάθε $r \in (0,1)$ και κάθε $n \geqslant 0$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D$.

Υπόδειξη. Σταθεροποιούμε $r \in (0,1)$ και θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δίσκο D. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

για κάθε $n \geqslant 0$. Από την υπόθεση, για κάθε $z \in \gamma_r^*$ έχουμε

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{e^{-1/|z|}}{|z|^{n+1}} = \frac{e^{-1/r}}{r^{n+1}},$$

και από την ML-ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{e^{-1/r}}{r^{n+1}} = n!\frac{e^{-1/r}}{r^n}.$$

Σταθεροποιούμε τώρα $n \geqslant 1$ και κάνοντας την αντικατάσταση $t = 1/r$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{-1/r}}{r^n} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

Αφήνοντας το $r \to 0^+$ στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Από το θεώρημα Taylor έπεται ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0$$

για κάθε $z \in D$.

3.38. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz,$$

όπου η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = -1$ και $z = 1$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Υπόδειξη. (i) Εάν τα σημεία -1 και 1 δεν βρίσκονται στο εσωτερικό της γ, από το θεώρημα Cauchy έχουμε $I = 0$.

(ii) Εάν μόνο το σημείο $z = -1$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γ τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{z^2}/(z-1)^2}{z+1}\, dz = \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{e}{4}.$$

(iii) Εάν μόνο το σημείο $z = 1$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γ τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{z^2}/(z+1)}{(z-1)^2}\, dz = \left(\frac{e^{z^2}}{z+1}\right)'\bigg|_{z=1} = \frac{e^{z^2}(2z^2+2z-1)}{(z+1)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{3e}{4}.$$

(iv) Εάν τα σημεία -1 και 1 βρίσκονται στο εσωτερικό της γ, τότε θεωρούμε δύο κύκλους C_1 και C_2 που δεν τέμνονται και βρίσκονται στο εσωτερικό της γ έτσι ώστε ο C_1 να περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο -1 και ο C_2 να περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 1, και από το γενικευμένο θεώρημα Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+} \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+} \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz = \frac{e}{4} + \frac{3e}{4} = e,$$

χρησιμοποιώντας και τις περιπτώσεις (ii) και (iii).

3.39. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz,$$

όπου ο κύκλος C^+ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = 0$ και $z = \pi$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Υπόδειξη. (i) Εάν τα σημεία 0 και π δεν βρίσκονται στο εσωτερικό του C, από το θεώρημα Cauchy έχουμε $I = 0$.

(ii) Εάν μόνο το σημείο $z = 0$ βρίσκεται στο εσωτερικό του C τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\cos z/(z-\pi)^3}{z}\, dz = \frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\bigg|_{z=0} = -\frac{1}{\pi^3}.$$

(iii) Εάν μόνο το σημείο $z = \pi$ βρίσκεται στο εσωτερικό του C τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{2!}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{\cos z/z}{(z-\pi)^3}\,dz\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos z}{z}\right)''\Big|_{z=\pi} = \frac{1}{2}\frac{-z^2\cos z + 2z\sin z + 2\cos z}{z^3}\Big|_{z=\pi} = \frac{\pi^2-2}{2\pi^3}.$$

(iv) Εάν τα σημεία 0 και π βρίσκονται στο εσωτερικό του C, τότε θεωρούμε δύο κύκλους C_1 και C_2 που δεν τέμνονται και βρίσκονται στο εσωτερικό του C έτσι ώστε ο C_1 να περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2 να περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο π, και από το γενικευμένο θεώρημα Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\,dz = -\frac{1}{\pi^3} + \frac{\pi^2-2}{2\pi^3} = \frac{\pi^2-4}{2\pi^3},$$

χρησιμοποιώντας και τις περιπτώσεις (ii) και (iii).

3.40. Έστω

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 3^n}.$$

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο το 0 στον οποίο η f είναι αναλυτική συνάρτηση. Να βρεθεί η $f(z)$ καθώς και η $f'(z)$.

Υπόδειξη. Υπολογίζουμε το

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}.$$

Έπεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 3$, άρα η f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,3)$. Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w| < 1$$

και παραγωγίζοντας την f έχουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3-z}, \qquad |z| < 3.$$

Επομένως, $f(z) = -\mathrm{Log}(3-z) + c$, $|z| < 3$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Αφού $f(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $c = \ln 3$, άρα

$$f(z) = \ln 3 - \mathrm{Log}(3-z), \qquad |z| < 3.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $|z| < 3$ έχουμε $3 - z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$.

3.41. Έστω $0 < r < R$. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{re^{it}}\,dt = 2\pi f'(0).$$

Υπόδειξη. Αν $z = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ τότε $dz = ire^{it}dt$, άρα $dt = \frac{1}{iz}dz$. Επομένως, από τον ολοκληρωτικό τύπο

Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}\,dt = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{iz^2}\,dz = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^2}\,dz\right) = 2\pi f'(0).$$

3.42. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz, \qquad n \geqslant 0.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz &= \frac{2\pi i}{n!}\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz\right] \\ &= \frac{2\pi i}{n!}\cdot (e^z)^{(n)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!}e^0 = \frac{2\pi}{n!}i.\end{aligned}$$

Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz &= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{in\theta}}\,d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\theta + i\sin\theta}}{e^{in\theta}}\,d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}e^{i(\sin\theta - n\theta)}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta - \sin\theta)\,d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

3.43. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(z)| \leqslant Me^{|z|}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ και κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει

$$|a_n| \leqslant M\frac{e^r}{r^n},$$

και συμπεράνατε ότι

$$|a_n| \leqslant M\frac{e^n}{n^n} \quad \text{για κάθε } n \geqslant 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $r > 0$ και $C^+(0, r)$ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα r, με τη θετική φορά διαγραφής. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Χρησιμοποιώντας την $|f(z)| \leqslant Me^{|z|}$ βλέπουμε ότι

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{Me^r}{r^{n+1}}$$

για κάθε $z \in C^+(0,r)$. Από την ML-ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C^+(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{Me^r}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r \\ &= M\frac{e^r}{r^n}. \end{aligned}$$

Για $r = n$ παίρνουμε την

$$(*) \qquad |a_n| \leqslant M\frac{e^n}{n^n}$$

για κάθε $n \geqslant 0$. Μάλιστα, έχουμε την πιο ισχυρή ανισότητα

$$|a_n| \leqslant \inf\left\{\frac{Me^r}{r^n} : r > 0\right\}.$$

Όμως, με παραγώγιση βλέπουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto \frac{e^r}{r^n}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $r = n$. Επομένως, η $(*)$ είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να δώσουμε με αυτόν τον τρόπο.

3.44. Έστω $R > 0$ και $\gamma = [-R,R] \cup \gamma_R$ κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη του επιπέδου, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο το 0 και ακτίνα R. Υποθέτουμε ότι το R είναι αρκετά μεγάλο ώστε το σημείο i να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ.

(α΄) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{3\pi}{16}.$$

Υπόδειξη.

(α΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z+i)^{-3}}{(z-i)^3}\,dz = \left((z+i)^{-3}\right)''\Big|_{z=i}.$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $\left((z+i)^{-3}\right)'' = 12(z+i)^{-5}$, άρα

$$\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = 12(2i)^{-5} = -\frac{3i}{8},$$

και συνεπώς

$$\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = \frac{3\pi}{8}.$$

(β΄) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\int_{[-R,R]} \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = \frac{3\pi}{8}.$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ είναι πηλίκο των πολυωνύμων $P(z) = 1$ και $Q(z) = (z^2+1)^3$. Αφού $\deg(Q) > \deg(P) + 2$, έχουμε

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = 0.$$

Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{3\pi}{8}.$$

Αφού η $x \mapsto 1/(x^2+1)^3$ είναι άρτια, έπεται ότι

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{3\pi}{16}.$$

3.45. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{ie^{-iz} - z^2}{z(z-i)^3}\, dz$$

όπου C ο κύκλος $|z - (1+2i)| = 2$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι το i βρίσκεται στο εσωτερικό του C και το 0 βρίσκεται στο εξωτερικό του C. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{ie^{-iz} - z^2}{z(z-i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{iz^{-1}e^{-iz} - z}{(z-i)^3}\, dz\right] \\ &= \frac{2\pi i}{2!}(iz^{-1}e^{-iz} - z)''\Big|_{z=i} = \pi i e^{-iz}(2iz^{-3} - 2z^{-2} - iz^{-1})\Big|_{z=i} \\ &= -\pi e i. \end{aligned}$$

3.46. Αποδείξτε ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\sin\theta}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 3iz - 1}\, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Υπόδειξη. Αν $z = e^{i\theta}$ τότε

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

και $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, άρα $d\theta = \frac{dz}{iz}$. Επομένως,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\sin\theta}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{2}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 3iz - 1}\, dz.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 3iz - 1 = 0$ είναι οι $z_{1,2} = -(3 \pm \sqrt{5})i/2$. Από αυτές, μόνο η ρίζα $z_2 = -(3 - \sqrt{5})i/2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, άρα από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\, dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1/(z-z_1)}{z - z_2}\, dz\right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{z - z_1}\Big|_{z=z_2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{z_2 - z_1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

3.47. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant a|z|^2 + b$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου a, b θετικές σταθερές. Να δείξετε ότι:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $R > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\frac{aR^2+b}{R^n}.$$

(β) Υπάρχουν $A, B, C \in \mathbb{C}$ με $|A| \leqslant a$, $|C| \leqslant b$, ώστε

$$f(z) = Az^2 + Bz + C, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Υπόδειξη. (α) Η f είναι ακέραια συνάρτηση, άρα γράφεται ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Έστω $C(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα $R > 0$. Αν $M_R = \max_{|z|=R} |f(z)|$, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$M_R \leqslant aR^2 + b.$$

Από τις εκτιμήσεις Cauchy, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $R > 0$ παίρνουμε

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M_R}{R^n} \leqslant \frac{aR^2+b}{R^n}.$$

(β) Εάν $n > 2$ τότε από το (α) για κάθε $R > 0$ έχουμε

$$|a_n| \leqslant \frac{a}{R^{n-2}} + \frac{b}{R^n} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to \infty$. Έπεται ότι $a_n = 0$ για κάθε $n > 2$, άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2. Δηλαδή, υπάρχουν $A, B, C \in \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = Az^2 + Bz + C, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|A| = |a_2| \leqslant \frac{aR^2+b}{R^2} = a + \frac{b}{R^2}$$

για κάθε $R > 0$, και αφήνοντας το $R \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $|A| \leqslant a$. Επίσης,

$$|C| = |a_0| = |f(0)| \leqslant a|0|^2 + b = b.$$

3.48. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $k \geqslant 0$ υπάρχουν σταθερές $A \geqslant 0$ και $B, R_0 > 0$ έτοιες ώστε $|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$ για κάθε $|z| > R_0$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

(β) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. (α) Η f είναι ακέραια συνάρτηση, άρα γράφεται ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Έστω $C(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα $R > R_0$. Αν $M_R = \max_{|z|=R} |f(z)|$, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$M_R \leqslant A + B \cdot R^k.$$

Από τις εκτιμήσεις Cauchy, για κάθε $n > k$ και $R > R_0$ παίρνουμε

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M_R}{R^n} \leqslant \frac{A + B \cdot R^k}{R^n} = \frac{A}{R^n} + \frac{B}{R^{n-k}} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to \infty$. Έπεται ότι $a_n = 0$ για κάθε $n > k$, άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

(β) Από την υπόθεση ότι $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιος ώστε $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1$ για κάθε $|z| > R_0$, δηλαδή

$$|f(z)| < |z| \text{ για κάθε } |z| > R_0.$$

Από το (α) έπεται ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1, δηλαδή υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = az+b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Όμως, τότε,

$$0 = \lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{az + b}{z} = \lim_{|z|\to\infty} \left(a + \frac{b}{z}\right) = a.$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $f(z) = b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η f είναι σταθερή.

3.49. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $|f(z)| \leqslant |z| + 2|z|^2$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, αποδείξτε ότι $f(z) = a_1 z + a_2 z^2$ για κάποιους $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ με $|a_1| \leqslant 1$ και $|a_2| \leqslant 2$.

Υπόδειξη. Η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση, άρα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Για κάθε $R > 0$ θέτουμε $M_R = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Από την υπόθεση έχουμε

$$M_R \leqslant R + 2R^2,$$

οπότε οι εκτιμήσεις Cauchy, για $z_0 = 0$ και $n > 2$ μας δίνουν

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M_R}{R^n} \leqslant \frac{R + 2R^2}{R^N} \longrightarrow 0$$

καθώς $R \to \infty$. Έπεται ότι $a_n = 0$ για κάθε $n > 2$. Συνεπώς, η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2. Δηλαδή, υπάρχουν $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leqslant 0 + 2 \cdot 0^2 = 0$, άρα $a_0 = f(0) = 0$. Έπεται ότι

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Επίσης,

$$|a_1| = |f'(0)| \leqslant \frac{M_R}{R} \leqslant \frac{R + 2R^2}{R} = 1 + 2R \longrightarrow 1$$

καθώς $R \to 0^+$, άρα $|a_1| \leqslant 1$. Τέλος,

$$|a_2| = \frac{|f^{(2)}(0)|}{2} \leqslant \frac{M_R}{R^2} \leqslant \frac{R + 2R^2}{R^2} = \frac{1}{R} + 2 \longrightarrow 2$$

καθώς $R \to \infty$, άρα $|a_2| \leqslant 2$.

3.50. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε $\mathrm{Im} f \geqslant 0$ στο $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(z) = e^{if(z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(if(z))} = e^{-\mathrm{Im}(f(z))} \leqslant 1,$$

διότι $-\mathrm{Im}(f(z)) \leqslant 0$. Από το θεώρημα Liouville έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε,

$$if'(z)e^{if(z)} = g'(z) = 0$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άρα $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και συνεπώς η f είναι σταθερή.

3.51. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $g(z) = e^{-f(z)}$ είναι ακέραια, και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$|g(z)| = |e^{-f(z)}| = e^{-\mathrm{Re}(f(z))} < e^0 = 1$$

από την υπόθεση. Από το θεώρημα Liouville, η g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε, η $|g(z)| = e^{-\mathrm{Re}(f(z))}$ είναι επίσης σταθερή, άρα η $\mathrm{Re}(f)$ είναι σταθερή. Από αυτό έπεται ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε την $h = \frac{1}{1+f}$. Η h είναι καλά ορισμένη, διότι

$$|1 + f(z)| \geqslant \mathrm{Re}(1 + f(z)) = 1 + \mathrm{Re}(f(z)) > 1$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η $1 + f$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Έπεται ότι η h είναι ακέραια συνάρτηση, και επιπλέον, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$|h(z)| = \frac{1}{|1 + f(z)|} < 1,$$

δηλαδή η h είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Liouville, η h είναι σταθερή. Έπεται ότι η f είναι σταθερή.

3.52. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|g(z)| > \frac{1}{2}|z|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|g(z)| > \frac{1}{2}|z|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Ειδικότερα, $|g(z)| > 0$ άρα $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε, η συνάρτηση $h(z) = \frac{z}{g(z)}$ είναι ακέραια, και από την υπόθεση έχουμε

$$|h(z)| = \frac{|z|}{|g(z)|} < 2$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα Liouville η h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Αφού $h(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $h(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού $h(z) = \frac{z}{g(z)} \neq 0$ για κάθε $z \neq 0$.

3.53. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \geqslant 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Από την $|f(z)| \geqslant 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν μηδενίζεται πουθενά, άρα η $g = 1/f$ ορίζεται καλά στο $\mathbb{C}$ και είναι ακέραια. Επίσης,

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leqslant 1$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άρα από το θεώρημα Liouville η $g = 1/f$ είναι σταθερή και έπεται ότι η f είναι σταθερή.

3.54. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση με $u^2 \leqslant v^2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θέτουμε $g = e^{f^2}$. Η g είναι ακέραια και από την υπόθεση ότι $u^2 \leqslant v^2$ παίρνουμε

$$|g| = e^{\mathrm{Re}(f^2)} = e^{u^2 - v^2} \leqslant 1.$$

Από το θεώρημα Liouville έπεται ότι η g είναι σταθερή. Θέτοντας $h = f^2$ έχουμε $g = e^h$ και η $g' \equiv 0$ μας δίνει

$$(e^h)' \equiv 0 \implies h'e^h \equiv 0 \;\; h' \equiv 0,$$

αφού η e^h δεν μηδενίζεται πουθενά. Έπεται ότι η $f^2 = h$ είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $c \geqslant 0$ ώστε $|f|^2 = |f^2| \equiv c$, συνεπώς $|f| \equiv \sqrt{c}$. Η f είναι ακέραια και η $|f|$ είναι φραγμένη, άρα η f είναι σταθερή από το θεώρημα Liouville.

3.55. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση με

$$|f(z)| \leqslant Me^{a\mathrm{Re}(z)} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C},$$

όπου a, M θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι

$$f(z) = ce^{az} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C},$$

για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $g(z) = \frac{f(z)}{e^{az}}$ είναι ακέραια και χρησιμοποιώντας την υπόθεση βλέπουμε ότι

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^{az}|} = \frac{|f(z)|}{e^{\mathrm{Re}(az)}} = \frac{|f(z)|}{e^{a\mathrm{Re}(z)}} \leqslant M$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα Liouville συμπεραίνουμε ότι η g είναι σταθερή: υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(z)}{e^{az}} = g(z) = c$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή $f(z) = ce^{az}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

3.56. Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση με $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Έστω επίσης $z_0 \in G$ τέτοιο ώστε $f(z_0) \neq 0$. Αν $D(z_0, \delta) \subseteq G$ είναι μια περιοχή του z_0 μέσα στον G, αποδείξτε ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in D(z_0, \delta)$ τέτοια ώστε

$$|f(z_1)| > |f(z_0)| \quad \text{και} \quad |f(z_2)| < |f(z_0)|.$$

Υπόδειξη. Αφού $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$, η αναλυτική συνάρτηση f δεν είναι σταθερή στο G και συνεπώς, από την αρχή μεγίστου, η $|f|$ δεν έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 \in G$. Τότε, σε οποιαδήποτε περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 η οποία περιέχεται στο G υπάρχει z_1 τέτοιο ώστε $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Η f είναι συνεχής και $f(z_0) \neq 0$, άρα υπάρχει $0 < \delta_1 < \delta$ τέτοιος ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta_1)$. Τότε, από την αρχή ελαχίστου η $|f|$ δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $z_0 \in D(z_0, \delta_1)$, άρα υπάρχει $z_2 \in D(z_0, \delta_1) \subseteq D(z_0, \delta)$ τέτοιο ώστε $|f(z_2)| < |f(z_1)|$.

3.57. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ώστε $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $|z| \leqslant 1$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ώστε $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $|z| \leqslant 1$. Τότε, η f δεν μηδενίζεται στον μοναδιαίο δίσκο. Παρατηρούμε ότι για κάθε $|z| = 1$ έχουμε $|f(z)| = e^1 = e$, ενώ $|f(0)| = e^0 = 1$. Συνεπώς, η $|f|$ δεν παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,1)$. Από την αρχή ελαχίστου η f είναι σταθερή στον $D(0,1)$. Όμως, μια σταθερή συνάρτηση f δεν μπορεί να ικανοποιεί την $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $z \in D(0,1)$ (διότι η $h(t) = e^t$ θα ήταν σταθερή στο $[0,1)$). Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

3.58. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στον κύκλο $|z| = 1$. Αν $f(0) = -i$ και $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| = 1$, αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον $D(0,1)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα στον $D(0,1)$, δηλαδή δεν μηδενίζεται στον μοναδιαίο δίσκο. Από την αρχή ελαχίστου, η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,1)$, δηλαδή στον μοναδιαίο κύκλο $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι $|f(z)| > 1$ για κάθε $z \in C(0,1)$, άρα η ελάχιστη τιμή της $|f|$ στον $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ είναι μεγαλύτερη από 1, ενώ από την υπόθεση έχουμε ότι $|f(0)| = |-i| = 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον $D(0,1)$.

3.59. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$ για κάθε $z \in U$. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ για κάθε $z \in U$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = e^{f(z)}, \qquad z \in U.$$

Η g είναι ολόμορφη στο U και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}(f(z_0)) = 0$ για κάποιο $z_0 \in U$. Τότε,

$$|g(z_0)| = e^{\mathrm{Re}(f(z_0))} = 1$$

και για κάθε $z \in U$ χουμε

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(f(z))} \geqslant e^0 = 1 = |g(z_0)|.$$

Συνεπώς,

$$\min_{z \in U} |g(z)| = |g(z_0)|$$

και αφού η g δεν είναι σταθερή καταλήγουμε σε άτοπο, λόγω της αρχής ελαχίστου.

3.60. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$ και $|f(z)| \leqslant M < \infty$ για κάθε $z \in D(0,R)$. Υποθέτουμε επίσης ότι το 0 είναι ρίζα τάξης 2 της f, δηλαδή $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R^2}|z|^2 \text{ για κάθε } z \in D(0,R)$$

και ότι

$$|f''(0)| \leqslant \frac{2M}{R^2}.$$

Υπόδειξη. Η f είναι αναλυτική στον $D(0,R)$ και $f(0) = f'(0) = 0$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad |z| < R.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g στον $D(0,R)$ με $g(0) = \frac{f''(0)}{2!}$ και $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$ αν $0 < |z| < R$, τότε η g είναι αναλυτική στον $D(0,R)$ με ανάπτυγμα

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-2}, \qquad |z| < R.$$

Έστω $z \in D(0,R)$. Αν θεωρήσουμε τυχόν r με $|z| < r < R$, από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(z)| \leqslant \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|^2} \leqslant \frac{M}{r^2},$$

και αφήνοντας το $r \to R^-$ παίρνουμε

$$|g(z)| \leqslant \frac{M}{R^2}.$$

Επομένως,

$$|f(z)| = |g(z)| \cdot |z|^2 \leqslant \frac{M}{R^2}|z|^2$$

για κάθε $z \in D(0,R)$. Τέλος, για $z = 0$ βλέπουμε ότι $|g(0)| = \frac{|f''(0)|}{2} \leqslant \frac{M}{R^2}$, άρα

$$|f''(0)| \leqslant \frac{2M}{R^2}.$$

3.61. Έστω f συνάρτηση αναλυτική στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και συνεχής στο σύνορο του Δ. Αν $|f(z)| \leqslant 1$ για κάθε $|z| = 1$ και $|f(z)| \leqslant 4$ για κάθε $|z| = 2$, αποδείξτε ότι $|f(1-i)| \leqslant 2$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$. Η g είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο Δ, καθώς και στο σύνορο του Δ που είναι οι κύκλοι $C(0,1) = \{z : |z| = 1\}$ και $C(0,2) = \{z : |z| = 2\}$. Από την υπόθεση έχουμε $|g(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in C(0,1)$ και $|g(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in C(0,2)$. Από την αρχή μεγίστου έπεται ότι $|g(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in \Delta$, άρα

$$|f(z)| \leqslant |z|^2$$

για κάθε $z \in \Delta$. Ειδικότερα, $|f(1-i)| \leqslant |1-i|^2 = 2$.

3.62. Έστω $a \in \mathbb{C}$ με $|a| \leqslant 1$. Θέτουμε

$$P(z) = \frac{a}{2} + (1-|a|^2)z - \frac{\overline{a}}{2}z^2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Να δείξετε ότι

$$\max_{|z|\leqslant 1} |P(z)| = \max_{|z|=1} \left|\frac{P(z)}{z}\right| \leqslant 1.$$

Υπόδειξη. Εάν $|z| = 1$ τότε $1/z = \overline{z}$, άρα

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{z} &= \frac{a}{2z} + 1 - |a|^2 - \frac{\overline{a}}{2}z =)1 - |a|^2) + \frac{1}{2}(a\overline{z} - \overline{a}z) \\ &= (1-|a|^2) + i\frac{a\overline{z} - \overline{a\overline{z}}}{2i} = (1-|a|^2) + i\mathrm{Im}(a\overline{z}). \end{aligned}$$

Έπεται ότι, εάν $|z| = 1$ τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{P(z)}{z}\right|^2 &= (1-|a|^2)^2 + |\mathrm{Im}(a\overline{z})|^2 \leqslant (1-|a|^2)^2 + |a\overline{z}|^2 \\ &= 1 + |a|^4 - 2|a|^2 + |a|^2 = 1 + |a|^2(|a|^2 - 1) \leqslant 1. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\max_{|z|=1} \left|\frac{P(z)}{z}\right| \leqslant 1,$$

και από την αρχή μεγίστου συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{|z|\leqslant 1} |P(z)| = \max_{|z|=1} \left|\frac{P(z)}{z}\right| \leqslant 1.$$

3.63. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geqslant 1$.

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(z)$ βαθμού το πολύ n τέτοιο ώστε $P(z) = z^n Q(1/z)$ για κάθε $z \neq 0$.

(β) Αν $|P(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να δείξετε ότι $|P(z)| \leqslant |z|^n$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geqslant 1$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, όπου $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, και $a_n \neq 0$. Για $z \neq 0$ έχουμε

$$P(z) = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right) = z^n Q(1/z),$$

όπου

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

(β) Εάν $|z| = 1$ τότε

$$|Q(1/z)| = |z^n Q(1/z)| = |P(z)| \leqslant 1.$$

Τότε, εάν $|w| = 1$, εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για $z = 1/w$ αίρνουμε $|Q(w)| \leqslant 1$. Από την αρχή μεγίστου έπεται ότι

$$\max_{|w|\leqslant 1} |Q(w)| = \max_{|w|=1} |Q(w)| \leqslant 1.$$

Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geqslant 1$. Θέτουμε $z = 1/w$. Τότε $|w| \leqslant 1$, άρα

$$|Q(1/z)| = |Q(w)| \leqslant 1,$$

και έπεται ότι

$$|P(z)| = |z|^n \, |Q(1/z)| \leqslant |z|^n.$$

3.64. Έστω $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D}(0,1) \subseteq U$. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|} \qquad \text{για κάθε } z \text{ με } |z| = 1.$$

Αποδείξτε ότι $|1 - z^2| \, |f(z)| \leqslant 2$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,1)$.

Υπόδειξη. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$\max_{|z|\leqslant 1} |(1 - z^2) f(z)| = \max_{|z|=1} |(1 - z^2) f(z)|.$$

Για $|z| = 1$ έχουμε $z\overline{z} = 1$, άρα

$$|1 - z^2| = |z\overline{z} - z^2| = |z| \, |\overline{z} - z| = | - 2i\mathrm{Im}(z)| = 2|\mathrm{Im}(z)|.$$

Συνεπώς,

$$|1 - z^2| \cdot |f(z)| = 2|\mathrm{Im}(z)| \cdot |f(z)| \leqslant 2 \cdot 1 = 2$$

από την υπόθεση. Έπεται ότι

$$\max_{|z|=1} |(1 - z^2) f(z)| \leqslant 2,$$

άρα

$$\max_{|z|\leqslant 1} |(1 - z^2) f(z)| \leqslant 2.$$

3.65. Να βρείτε τα

$$\max\{|f(z)| : z \in K\} \quad \text{και} \quad \min\{|f(z)| : z \in K\}$$

καθώς και τα σημεία στα οποία τα παραπάνω max και min λαμβάνονται, όπου:

(α) $f(z) = z^2 + 3z - 1$, $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.

(β) $f(z) = e^{z^2}$, K είναι το κλειστό και φραγμένο χωρίο που έχει σύνορο το τρίγωνο με κορυφές $0, -1, 1+i$.

Υπόδειξη. (α) Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$\max_{|z|\leqslant 1} |z^2 + 3z - 1| = \max_{|z|=1} |z^2 + 3z - 1|.$$

Για $|z| = 1$ έχουμε $z = e^{i\theta}$ για κάποιον $\theta \in (-\pi, \pi]$ και $\overline{z} = 1/z$, άρα

$$\begin{aligned} |z^2 + 3z - 1| &= \left| z\left(z + 3 - \frac{1}{z}\right)\right| = |z + 3 - \overline{z}| \\ &= |3 + 2i\mathrm{Im}(z)| = |3 + 2i\sin\theta| = \sqrt{9 + 4\sin^2\theta} \leqslant \sqrt{13}, \end{aligned}$$

με ισότητα αν $\sin^2\theta = 1$, δηλαδή $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, ή ισοδύναμα, $z = \pm i$.

Συνεπώς, $\max\limits_{|z|\leqslant 1} |z^2 + 3z - 1| = \sqrt{13}$ και το μέγιστο λαμβάνεται όταν $z = \pm i$.

(β) Έχουμε $|f(z)| = e^{\mathrm{Re}(z^2)}$ και, από την αρχή μεγίστου-ελαχίστου,

$$\max_K |f| = \max_{\partial(K)} |f| \quad \text{και} \quad \min_K |f| = \min_{\partial(K)} |f|.$$

Το σύνορο του τριγώνου K αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-1, 0]$, $[0, 1+i]$ και $[1+i, -1]$.

(i) Παρατηρούμε ότι
$$\max_{[-1,0]} e^{\mathrm{Re}(z^2)} = \max_{x\in[-1,0]} e^{x^2} = e.$$

(ii) Τα σημεία του $[0, 1+i]$ είναι της μορφής $z = x + ix$, $x \in [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Re}((x+ix)^2) = \mathrm{Re}(x^2(1+i)^2) = \mathrm{Re}(2ix^2) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα
$$\max_{[0,1+i]} e^{\mathrm{Re}(z^2)} = \max_{x\in[0,1]} e^0 = 1.$$

(iii) Τα σημεία του $[1+i, -1]$ είναι της μορφής $z = (1-x)(-1) + x(1+i)$, $x \in [0, 1]$. Δηλαδή, της μορφής $(2x-1)+ix$, $x \in [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Re}(((2x-1)+ix)^2) = \mathrm{Re}((2x-1)^2 - x^2 + 2x(2x-1)i) = 3x^2 - 4x + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, και $\max_{x\in[0,1]}(3x^2 - 4x + 1) = 1$, άρα
$$\max_{[1+i,-1]} e^{\mathrm{Re}(z^2)} = e^1 = e.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\max\limits_K |f(z)| = e$.

Για το $\min\limits_K |f(z)|$ δουλεύουμε όπως πριν: έχουμε $\min_{[-1,0]} |f| = 1$, $\min_{[0,1+i]} |f| = 1$ και

$$\min_{[1+i,-1]} |f| = e^{\min_{x\in[0,1]}(3x^2-4x+1)} = e^{3(2/3)^2-4(2/3)+1} = e^{-1/3},$$

άρα $\min\limits_K |f(z)| = e^{-1/3}$.

3.66. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = (1 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2$. Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = 1 - z^2$ στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ αποδείξτε ότι

$$\max_{x^2+y^2\leqslant 1} g(x, y) = g(0, \pm 1) = 4.$$

Υπόδειξη. Η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και

$$|f(z)|^2 = |f(x + iy)|^2 = |1 - (x + iy)^2|^2 = |(1 + y^2 - x^2) - i2xy|^2 = (1 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2 = g(x, y).$$

Από την αρχή μεγίστου η $|f|$, άρα και η $|f|^2$, στον $\overline{D}(0, 1)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0, 1)$, δηλαδή στον κύκλο $|z| = 1$ με εξίσωση $z = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Για $|z| = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= |1 - z^2|^2 = |1 - e^{2it}|^2 = |1 - \cos 2t - i \sin 2t|^2 = (1 - \cos 2t)^2 + \sin^2(2t) \\ &= 2 - 2\cos 2t = 4\sin^2 t. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $|f|^2$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν $\sin t = \pm 1$, δηλαδή $t = \pm\pi/2$, ή ισοδύναμα αν $z = e^{\pm\pi i/2} = \pm i$. Έπεται ότι
$$\max_{x^2+y^2\leqslant 1} = \max_{|z|\leqslant 1} |f(z)|^2 = |f(\pm i)|^2 = 4.$$

Δεύτερος τρόπος: Εάν $|z| = 1$ τότε

$$|f(z)|^2 = |1 - z^2|^2 \leqslant (1 + |z|^2)^2 = 4$$

με ισότητα αν $z^2 = -1$, δηλαδή $z = \pm i$. Έπεται ότι $\max\limits_{|z|=1} |f(z)|^2 = 4$.

3.67. Έστω $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ πολυώνυμο με $|p(z)| \leqslant 1$ για κάθε $|z| = 1$. Αποδείξτε ότι $p(z) \equiv z^n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$q(z) := z^n p(1/z) = 1 + a_{n-1}z + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n.$$

Από την $|p(z)| \leqslant 1$ για κάθε $|z| = 1$ έχουμε ότι $|p(e^{-it})| \leqslant 1$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, άρα

$$\max_{|z|=1} |q(z)| = \max_{|z|=1} |p(1/z)| = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |p(e^{-it})| \leqslant 1.$$

Όμως $q(0) = 1$, οπότε από την αρχή μεγίστου το q πρέπει να είναι σταθερό στον μοναδιαίο δίσκο. Δηλαδή, $q(z) \equiv 1$ στον μοναδιαίο δίσκο, και από το θεώρημα μοναδικότητας έπεται ότι $q(z) \equiv 1$ στο $\mathbb{C}$, άρα $a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. Από αυτό βλέπουμε ότι $p(z) \equiv z^n$.

3.68. Έστω T το κλειστό τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα $-1, 0, 1+i$. Να βρείτε το $\max_{z\in T} |e^{z^2}|$ καθώς και τα σημεία του T στα οποία λαμβάνεται αυτό το μέγιστο.

Υπόδειξη. Από την αρχή μεγίστου γνωρίζουμε ότι

$$\max_{z\in T} |e^{z^2}| = \max_{z\in\partial T} |e^{z^2}| = \max_{z\in\partial T} e^{\mathrm{Re}(z^2)}.$$

Το σύνορο ∂T του τριγώνου T αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα AO, OB και AB, όπου $A = (-1, 0)$, $O = (0, 0)$ και $B = (1, 1)$. Κοιτάζουμε καθένα από αυτά χωριστά.

Στο AO έχουμε

$$\max_{z\in AO} |e^{z^2}| = \max_{x\in[-1,0]} e^{x^2} = e^{(-1)^2} = e,$$

το οποίο πιάνεται όταν $x = -1$, δηλαδή στο A. Στο OB έχουμε

$$\max_{z\in OB} |e^{z^2}| = \max_{x\in[0,1]} e^{\mathrm{Re}((x+ix)^2)} = \max_{x\in[0,1]} e^{\mathrm{Re}(2ix)} = e^0 = 1.$$

Εάν $z = x + iy \in AB$, τότε $y \in [0, 1]$ και $x = 2y - 1$, άρα

$$z^2 = ((2y-1) + iy)^2 \implies \mathrm{Re}(z^2) = (2y-1)^2 - y^2 = 3y^2 - 4y + 1.$$

Με μελέτη της $\varphi(y) = 3y^2 - 4y + 1$ στο $[0, 1]$ βλέπουμε ότι $\max_{y\in[0,1]} \varphi(y) = \varphi(0) = 1$, άρα

$$\max_{z\in AB} |e^{z^2}| = \max_{y\in[0,1]} e^{\varphi(y)} = e,$$

το οποίο πιάνεται όταν $y = 0$ και $x = -1$, δηλαδή στο A. Συγκρίνοντας τα τρία μέγιστα που βρήκαμε πιο πάνω, συμπεραίνουμε ότι $\max_{z\in T} |e^{z^2}| = e$, και αυτή η μέγιστη τιμή πιάνεται για $z = -1$.

3.69. Θέτουμε $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και $\overline{D} = D \cup \partial D$. Θεωρούμε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D} \subseteq U$.

(α) Έστω $g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $|g(z)| = 1$ για κάθε $z \in \partial D$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Αποδείξτε ότι η g είναι σταθερή στο D.

(β) Έστω $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \partial D$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στον D.

Υπόδειξη. (α) Από την αρχή μεγίστου έχουμε ότι

$$\max_{z\in\overline{D}} |g(z)| = \max_{z\in\partial D} |g(z)| = 1.$$

Επειδή $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$, από την αρχή ελαχίστου έχουμε ότι

$$\min_{z\in\overline{D}} |g(z)| = \min_{z\in\partial D} |g(z)| = 1.$$

Έπεται ότι

$$\max_{z\in\overline{D}}|g(z)| = \min_{z\in\overline{D}}|g(z)| = 1,$$

άρα $|g| \equiv 1$ στο $\overline{D}$, απ' όπου έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $\overline{D}$.

(β) Ορίζουμε $g(z) = e^{if(z)}$, $z \in D$. Τότε, η g είναι ολόμορφη στο D και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Επίσης, για κάθε $z \in \partial D$, από την υπόθεση ότι $f(z) \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $|g(z)| = |e^{if(z)}| = 1$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η g είναι σταθερή στο D, άρα

$$0 = g'(z) = if'(z)e^{if(z)}$$

για κάθε $z \in D$, το οποίο μας δίνει $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D$. Έπεται ότι η f είναι σταθερή στο D.

3.70. Έστω $r \in (0,1)$, $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D}(0,r) \subseteq U$. Θεωρούμε ολόμορφη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με $|f(z^2)| \geqslant |f(z)|$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. Αποδείξτε ότι

$$\max\{|f(z)| : |z| \leqslant r^2\} = \max\{|f(z^2)| : |z| \leqslant r\}$$

και ότι η f είναι σταθερή στον $\overline{D}(0,r)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = r^2\} = \{w^2 : w \in \mathbb{C} \ \text{ και } \ |w| = r\}.$$

Πράγματι, αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| = r^2$, τότε $z^2 = r^2e^{i\varphi}$, όπου $\varphi = \text{Arg}(z)$, άρα $z = (re^{i\varphi/2})^2 = w^2$, όπου $w = re^{i\varphi/2}$, και $|w| = r$. Αντίστροφα, αν $w \in \mathbb{C}$ και $|w| = r$ τότε για τον $z = w^2$ έχουμε $|z| = |w^2| = |z|^2 = r^2$. Έπεται ότι

$$\max_{|z|=r^2}|f(z)| = \max_{|w|=r}|f(w^2)|.$$

Από την αρχή μεγίστου έπεται ότι

$$\max_{|z|\leqslant r^2}|f(z)| = \max_{|z|=r^2}|f(z)| = \max_{|w|=r}|f(w^2)| = \max_{|w|\leqslant r}|f(w^2)|.$$

Επιλέγουμε $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $|z_0| = r^2$ και $|f(z_0)| = \max_{|z|=r^2}|f(z)|$. Από την αρχή μεγίστου,

$$|f(z_0)| = \max_{|z|\leqslant r^2}|f(z)| = \max_{|w|\leqslant r}|f(w^2)| \geqslant \max_{|w|\leqslant r}|f(w)|,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση. Όμως, $r^2 < r$ άρα $|z_0| < r$, επομένως $|f(z_0)| = \max\limits_{|w|\leqslant r}|f(w)|$ και το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\overline{D}(0,r)$, απ' όπου έπεται, λόγω της αρχής μεγίστου, ότι η f είναι σταθερή στον $\overline{D}(0,r)$.

3.71. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένο χωρίο και $f,g : \overline{U} \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις, ολόμορφες στο U, τέτοιες ώστε $f\big|_{\partial U} = g\big|_{\partial U}$. Αποδείξτε ότι

$$f\big|_{\overline{U}} = g\big|_{\overline{U}}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$\max_{\overline{U}}|h(z)| = \max_{\partial(U)}|h(z)| = \max_{\partial(U)}|f(z) - g(z)| = 0.$$

Έπεται ότι $h \equiv 0$ στο $\overline{U}$, δηλαδή $f \equiv g$ στο $\overline{U}$.

3.72. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 3\},$$

τέτοια ώστε $|f(z)| \leqslant 1$ για $|z| = 1$ και $|f(z)| \leqslant 9$ για $|z| = 3$. Να δείξετε ότι $|f(z)| \leqslant |z|^2$ για κάθε $z \in \Delta$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2}, \qquad z \in \Delta.$$

Η g είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο $V = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\} \subset \overline{V} = \Delta \subset U$ και συνεχής στο $\overline{V} = \Delta$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε ότι

$$\max_{z \in \overline{V}} |g(z)| = \max_{z \in \partial(V)} |g(z)|,$$

δηλαδή

$$\max_{z \in \Delta} |g(z)| = \max \left\{ \max_{|z|=1} |g(z)|, \max_{|z|=3} |g(z)| \right\}.$$

Όταν $|z| = 1$ έχουμε

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| = |f(z)| \leqslant 1$$

από την υπόθεση, και όταν $|z| = 3$ έχουμε

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| = \frac{|f(z)|}{9} \leqslant 1$$

πάλι από την υπόθεση. Συνεπώς,

$$\max_{z \in \Delta} |g(z)| = \max \left\{ \max_{|z|=1} |g(z)|, \max_{|z|=3} |g(z)| \right\} \leqslant 1.$$

Αυτό δείχνει ότι για κάθε $z \in \Delta$ ισχύει $|g(z)| \leqslant 1 \implies |f(z)| \leqslant |z|^2$.

3.73. Αποδείξτε ότι

$$\max_{|z| \leqslant 1} |(z-1)(2z+1)| = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $f(z) = (z-1)(2z+1)$. Από την αρχή μεγίστου,

$$\max_{|z| \leqslant 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Για $|z| = 1$ έχουμε

$$|z-1|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1 = 2(1 - \mathrm{Re}(z))$$

και

$$|2z+1|^2 = 4|z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) + 1 = 5 + 4\mathrm{Re}(z).$$

Εάν $|z| = 1$ τότε υπάρχει $t \in [0, 2\pi]$ ώστε $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, άρα

$$|f(z)|^2 = 2(1 - \cos t)(5 + 4\cos t) = 2\varphi(t),$$

όπου $\varphi(t) = -4\cos^2 t - \cos t + 5$. Παραγωγίζοντας την φ βλέπουμε ότι

$$\varphi'(t) = -8\cos t(-\sin t) + \sin t = \sin t(1 + 8\cos t),$$

άρα $\varphi'(t) = 0$ αν $t = 0$ ή π ή 2π ή αν $\cos t = -1/8$. Υπολογίζουμε τις $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$ και $\varphi(\pi) = 4$. Εάν $\cos t_0 = -1/8$ τότε $\varphi(t_0) = -4(-1/8)^2 - (-1/8) + 5 = -1/16 + 1/8 + 5 = 81/16$. Επομένως, η μέγιστη τιμή της φ πιάνεται στο t_0, και $|f(e^{it_0})|^2 = 2\varphi(t_0) = 81/8$. Έπεται ότι

$$\max_{|z| \leqslant 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)| = \sqrt{81/8} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

3.74. Έστω $f : D(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ μη σταθερή ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε $r \in (1,2)$,

$$\max\{|f(z)| : |z| = r\} \leqslant \frac{1}{r-1}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup\{|f(z)| : |z| < 2\} \leqslant 1 \quad \text{και} \quad |f(0)| < 1.$$

Υπόδειξη. Έστω $z \in D(0,2)$. Επιλέγουμε r ώστε

$$(*) \qquad \max\{1, |z|\} < r < 2.$$

Η f είναι ολόμορφη στον $D(0,2)$, ο οποίος περιέχει το κλειστό και φραγμένο χωρίο $D_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leqslant r\}$. Από την αρχή μεγίστου και την υπόθεση παίρνουμε

$$\max_{|w|\leqslant r} |f(w)| = \max_{|w|=r} |f(w)| \leqslant \frac{1}{r-1},$$

άρα $|f(z)| \leqslant \frac{1}{r-1}$. Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε r που ικανοποιεί την $(*)$, οπότε, παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 2^-$ βλέπουμε ότι $|f(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in D(0,2)$. Δηλαδή,

$$\sup\{|f(z)| : |z| < 2\} \leqslant 1$$

και, ειδικότερα, $|f(0)| \leqslant 1$. Μένει να δείξουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι γνήσια, δηλαδή ότι $|f(0)| < 1$. Εάν υποθέσουμε ότι $|f(0)| = 1$ τότε έχουμε

$$|f(0)| = 1 = \max\{|f(z)| : |z| < 2\},$$

δηλαδή η $|f|$ παίρνει μέγιστη τιμή στο ανοικτό και συνεκτικό $D(0,2)$. Από την αρχή μεγίστου συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Συνεπώς, πράγματι, $|f(0)| < 1$.

3.75. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 3\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad |f(0)| \leqslant \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|.$$

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει ισότητα σε αυτήν την ανισότητα.

Υπόδειξη. Τα ± 1, $\pm i$ είναι ρίζες της f, άρα

$$f(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)g(z) = (z^4-1)g(z),$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στον $\overline{D}(0,3)$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(0)| \leqslant \max_{|z|=3} |g(z)|,$$

άρα

$$\begin{aligned} |f(0)| = |g(0)| \leqslant \max_{|z|=3} |g(z)| &= \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z^4-1|} \leqslant \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z|^4-1} \\ &= \frac{1}{3^4-1} \max_{|z|=3} |f(z)| = \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|. \end{aligned}$$

Για να έχουμε ισότητα, πρέπει να ικανοποιείται η

$$|g(0)| = \max_{|z|=3} |g(z)|.$$

Τότε, από την αρχή μεγίστου η g πρέπει να είναι σταθερή στον $\overline{D}(0,3)$, δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = c(z^4-1)$. Συνεπώς, όλες οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ισότητα στην $(*)$ είναι της μορφής $f(z) = c(z^4-1)$, $c \in \mathbb{C}$. Αντίστροφα, εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε τέτοια συνάρτηση ισχύει ισότητα στην $(*)$ αφού $|f(0)| = |c|$ και $\max_{|z|=3}|f(z)| = |c|\cdot\max_{|z|=3}|z^4-1| = 80|c|$.

3.76. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad |f(0)| \leqslant \frac{1}{15}\max_{|z|=2}|f(z)|.$$

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Υπόδειξη. Οι ± 1, $\pm i$ είναι ρίζες της f, επομένως υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική στον $\overline{D}(0,2)$ ώστε

$$f(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)g(z) = (z^4-1)g(z).$$

Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(0)| \leqslant \max_{|z|=2}|g(z)|,$$

άρα

$$\begin{aligned} |f(0)| = |g(0)| &\leqslant \max_{|z|=2}|g(z)| = \max_{|z|=2}\frac{|f(z)|}{|z^4-1|} \leqslant \max_{|z|=2}\frac{|f(z)|}{|z|^4-1} \\ &= \frac{1}{2^4-1}\max_{|z|=2}|f(z)| = \frac{1}{15}\max_{|z|=2}|f(z)|. \end{aligned}$$

Εάν έχουμε ισότητα, τότε $|g(0)| = \max_{|z|=2}|g(z)|$ και από την αρχή μεγίστου έπεται ότι η g είναι σταθερή στον $\overline{D}(0,2)$, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = c(z^4-1)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $t \in [0,2\pi]$ ισχύει

$$|(2e^{it})^4-1|^2 = (16\cos(4t)-1)^2 + 256\sin^2(4t) = 257 - 32\cos(4t) \leqslant 289,$$

με ισότητα αν $t = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή αν $z = \sqrt{2}(1+i)$, οπότε $\cos(4t) = -1$. Συνεπώς,

$$\max_{|z|=2}|z^4-1| = \sqrt{289} = 17.$$

Επομένως, για να ικανοποιεί η $f(z) = c(z^4-1)$ την $(*)$ θα πρέπει να ισχύει $|c| = \frac{1}{15}\cdot 17|c|$, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν $c = 0$. Δηλαδή, η μοναδική συνάρτηση f για την οποία έχουμε ισότητα στην $(*)$ είναι η $f \equiv 0$.

Κεφάλαιο 4

Σειρές Laurent και ολοκληρωτικά υπόλοιπα

4.1. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0 στον «δακτύλιο» Δ, όπου:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -2, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+2| < 3\}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(iii) $f(z) = \sin\left(\dfrac{z}{1-z}\right), \quad z_0 = 1, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Υπόδειξη. (i) Αρχικά γράφουμε

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

Θέτουμε $w = \frac{z+2}{3}$, οπότε $|w| < 1$ και $z = 3w - 2$. Επομένως,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3w-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-w} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Στη συνέχεια θέτουμε $w = \frac{2}{z+2}$, οπότε $|w| < 1$ και $z = \frac{2}{w} - 2 = 2\frac{1-w}{w}$. Επομένως,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{w}{1-w} = \frac{w}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(z+2)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}.$$

Τελικά,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}.$$

(ii) Γράφουμε

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z} = \frac{1-\cos(2z)}{2z} = \frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{(2n)!}z^{2n-1}.$$

(iii) Θέτουμε $w = 1 - z$, δηλαδή $z = 1 - w$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin\left(\frac{1-w}{w}\right) = \sin\left(\frac{1}{w} - 1\right) = \sin\frac{1}{w}\cos(1) - \cos\frac{1}{w}\sin(1) \\ &= \cos(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{w^{2n+1}} - \sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{w^{2n}} \\ &= \cos(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}} - \sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(1-z)^{2n}}. \end{aligned}$$

4.2. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = -1$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ αν $|w| < 1$, και παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1}, \qquad |w| < 1.$$

Για τον δακτύλιο $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{[1-(z+1)]^2(z+1)} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)(z+1)^n. \end{aligned}$$

Στον δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$ έχουμε $|1/(z+1)| < 1$, άρα

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{[1-1/(z+1)]^2(z+1)^3} = \frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{(z+1)^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{(z+1)^{n+2}} = -\sum_{n=-\infty}^{-3}(n+2)(z+1)^n. \end{aligned}$$

4.3. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz}{(z-1)(z^2+4i)}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ σε έναν δακτύλιο που περιέχει το $1 - 2i$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο ισχύει το ανάπτυγμα Laurent της f;

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$f(z) = \frac{z^2 + 4i}{(z-1)(z^2+4i)} + \frac{4iz - 4i}{(z-1)(z^2+4i)} = \frac{1}{z-1} + \frac{4i}{z^2+4i}.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι τα 1, $\sqrt{2}(1-i)$ και $\sqrt{2}(-1+i)$. Επομένως, έχουμε ανάπτυγμα Laurent για την f στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant |z| < 1\}$ όπου έχουμε ανάπτυγμα Taylor, $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. Θα αναπτύξουμε την f στον Δ_3, διότι $1 - 2i \in \Delta_3$.

Χρησιμοποιώντας τις $1/(1-w)=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ και $1/(1+w)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ για $|w|<1$, γράφουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}+\frac{4i}{z^2+4i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}+\frac{4i}{z^2}\frac{1}{1+4i/z^2} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{4i}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4i)^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4i)^{n+1}}{z^{2n+2}} \end{aligned}$$

στον δακτύλιο $\Delta_3=\{z\in\mathbb{C}: 2<|z|<\infty\}$.

4.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2+5)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0=0$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2-2i$.

Υπόδειξη. Έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<\sqrt{5}\}$ και $\Delta_2=\{z\in\mathbb{C}: \sqrt{5}<|z|<\infty\}$. Το σημείο $2-2i$ ανήκει στον δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w|<1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} \implies \frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}, \quad |w|<1.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το ανάπτυγμα με $w=5/z^2$ (όπου $|z|>\sqrt{5}$) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5}\frac{1}{(1+5/z^2)^2} = \frac{1}{z^5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\left(\frac{5}{z^2}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n 5^{n-1}\frac{1}{z^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)5^n\frac{1}{z^{2n+5}}. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο ισχύει αυτό το ανάπτυγμα Laurent είναι ο Δ_2.

4.5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0=1$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2-3i$.

Υπόδειξη. Έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-1|<3\}$ και $\Delta_2=\{z\in\mathbb{C}: 3<|z-1|<\infty\}$. Το σημείο $2-3i$ ανήκει στον δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w|<1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} \implies \frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}, \quad |w|<1.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το ανάπτυγμα με $w=3/(z-1)$ (όπου $|z-1|>3$) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)[(z-1)+3]^2} = \frac{1}{(z-1)^3[1+3/(z-1)]^2} = \frac{1}{(z-3)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\left(\frac{3}{z-1}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n 3^{n-1}\frac{1}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-2)3^{n-3}\frac{1}{(z-1)^n}. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο ισχύει αυτό το ανάπτυγμα Laurent είναι ο Δ_2.

4.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-i)}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0=i$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $\sqrt{2}-i$.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)} = \frac{1}{(z+i)(z-i)^2}$$
έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\pm i$. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το i μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| < \infty\}$. Το σημείο $\sqrt{2} - i$ ανήκει στον Δ_2, άρα θα βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f σε αυτόν τον δακτύλιο. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ με $w = \frac{2i}{z-i}$ γράφουμε
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{((z-i)+2i)(z-i)^2} = \frac{1}{(z-i)^3\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^{n+3}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n\frac{1}{(2i)^n}(z-i)^{n-3}. \end{aligned}$$
Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο ισχύει αυτό το ανάπτυγμα Laurent είναι ο Δ_2.

4.7. Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση
$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3-z}$$
στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$.

Υπόδειξη. Αν $z \in \Delta$ τότε για τον $w = \frac{z-1}{2}$ έχουμε $|w| < 1$, άρα
$$\begin{aligned} \frac{1}{3-z} &= \frac{1}{3-1-2w} = \frac{1}{2(1-w)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}w^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n. \end{aligned}$$
Επίσης, αν $z \in \Delta$ τότε για τον $w = \frac{1}{z-1}$ (ισοδύναμα, $z = \frac{1+w}{w}$) έχουμε $|w| < 1$, άρα
$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= w^2\frac{1}{(1+w)^2} = -w^2\left(\frac{1}{1+w}\right)' \\ &= -w^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n w^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)\frac{1}{(z-1)^n}. \end{aligned}$$
Δηλαδή, η σειρά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στον δακτύλιο Δ είναι η
$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

4.8. Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = -1$ τη συνάρτηση
$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$
στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 2\}$.

Υπόδειξη. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z+1| > 2$. Θέτοντας $w = \frac{2}{z+1}$ έχουμε $|w| < 1$ και $z - 1 = z + 1 - 2 = \frac{2}{w} - 2 = \frac{2(1-w)}{w}$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)^2} &= \frac{w^2}{4}\cdot\frac{1}{(1-w)^2} = \frac{w^2}{4}\left(\frac{1}{1-w}\right)' \\ &= \frac{w^2}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right)' = \frac{w^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n+1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(z+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{n-1}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}.$$

4.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{i}{z(z-i)(z^2+1)}.$$

Να βρεθούν όλοι οι δυνατοί δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = i$ στους οποίους η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1+2i$.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{i}{z(z-i)(z^2+1)} = \frac{(z+i)-z}{z(z+i)(z-i)^2} = \frac{1}{z(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)(z-i)^2}$$

έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα 0 και $\pm i$. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το i μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}$, $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z-i| < 2\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| < \infty\}$. Επειδή $|(1+2i)-i| = |1+i|$ και $1 < |1+i| = \sqrt{2} < 2$, το σημείο $1+2i$ ανήκει στον Δ_2, άρα θα βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f σε αυτόν τον δακτύλιο. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ με $w = \frac{2i}{z-i}$ (και παρατηρώντας ότι αν $1 < |z-i| < 2$ τότε $\left|\frac{i}{z-i}\right| < 1$ και $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$) γράφουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)(z-i)^2} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2[(z-i)+i]} - \frac{1}{(z-i)^2[(z-i)+2i]} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} - \frac{1}{2i(z-i)^2}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z-i}\right)^n - \frac{1}{2i(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-i)^{n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-2}.\end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο ισχύει αυτό το ανάπτυγμα Laurent είναι ο Δ_2.

4.10. (α) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = -2$ της συνάρτησης

$$f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

και να υπολογιστεί το $\mathrm{Res}(f,-2)$.

(β) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = 0$ της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{\sin z - z\cos z}{z^4}$$

και να υπολογιστεί το $\mathrm{Res}(g, 0)$.

(γ) Έστω ότι η συνάρτηση h είναι αναλυτική στον τρυπημένο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε

$$|h(z)| \leqslant C|z|^{-1/2} \quad \text{για κάθε } \; z \in \Delta.$$

Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της h είναι το $z = 0$;

Υπόδειξη. (α) Έχουμε ότι

$$(w-5)\sin\left(\frac{1}{w}\right) = (w-5)\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{3!}\frac{1}{w^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{w^5} - \cdots\right) = 1 - \frac{5}{w} - \frac{1}{3!}\frac{1}{w^2} + \cdots,$$

άρα θέτοντας $w = z + 2$ παίρνουμε

$$f(z) = 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z+2)^2} + \cdots.$$

Έπεται ότι το $z = -2$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f με $\mathrm{Res}(f, -2) = -5$.

(β) Για την $\varphi(z) = \sin z - z\cos z$ έχουμε $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ και $\varphi'''(0) = 2 \neq 0$. Συνεπώς, το $z = 0$ είναι ρίζα τάξης 3 του αριθμητή της g και ρίζα τάξης 4 του παρονομαστή της g. Έπεται ότι το 0 είναι απλός πόλος της g. Γράφοντας

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^4}\left[\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) - z\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)z + \cdots, \end{aligned}$$

βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Res}(g, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(g, 0)$ είναι, αφού το 0 είναι απλός πόλος, να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(g, 0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z - z\cos z}{z^4} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{z^3} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{3z^2} = \frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα L'Hôpital.

(γ) Παρατηρούμε ότι $|zh(z)| \leqslant C|z|^{1/2}$ για κάθε $z \in \Delta$, άρα $\lim_{z\to 0} zh(z) = 0$. Έπεται ότι το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h.

4.11. Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant |z|^{1/2} + |z|^{-1/2}$$

για κάθε $z \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Έχουμε $|zf(z)| \leqslant |z|^{3/2} + |z|^{1/2}$ για κάθε $z \neq 0$, άρα $\lim_{z\to 0}(zf(z)) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο για την $g(z) = zf(z)$, άρα η g επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση. Αφού

$$|g(z)| = |zf(z)| \leqslant |z|^{3/2} + |z|^{1/2} \leqslant 2|z|^{3/2}$$

για κάθε $|z| \geqslant 1$, από το γενικευμένο θεώρημα Liouville βλέπουμε ότι η $g(z) = zf(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 1. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε

$$zf(z) = a + bz$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από την $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, παίρνοντας όρια στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι $a = 0$. Συνεπώς, $f(z) = b$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, δηλαδή η f είναι σταθερή.

4.12. Έστω f ολόμορφη και φραγμένη στον «τρυπημένο» ανοικτό δίσκο $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $\delta > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και θα δείξουμε ότι αν $k < 0$ τότε $a_k = 0$.

Η f είναι φραγμένη στο $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(z)| \leqslant M \;\text{ για κάθε }\; z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}.$$

Για κάθε $0 < \rho < \delta$ θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

και αφού για κάθε $z \in \gamma_\rho^*$ έχουμε

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \leqslant \frac{M}{\rho^{k+1}},$$

από την ML-ανισότητα έπεται ότι

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{k+1}} q\pi\rho = \frac{M}{\rho^k}.$$

Έστω τώρα $k < 0$. Για κάθε $0 < \rho < \delta$ έχουμε

$$|a_k| \leqslant M \cdot \rho^{-k}$$

και $\lim_{\rho\to 0^+} \rho^{-k} = 0$ διότι $-k > 0$, άρα $a_k = 0$.

4.13. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε μια περιοχή U του 0 με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή V του 0, τέτοια ώστε $f(z) = \phi(z)^2$ για κάθε $z \in V$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, το 0 είναι ρίζα τάξης 2 για την f, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$f(z) = z^2 g(z)$$

όπου g ολόμορφη συνάρτηση στην U με $g(0) \neq 0$. Αφού η g είναι συνεχής στην U και $g(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή V του 0 τέτοια ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in V$. Το V είναι απλά συνεκτικός τόπος όπου η g δεν μηδενίζεται, άρα υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση h στο V, τέτοια ώστε $g(z) = h(z)^2$ για κάθε $z \in V$. Αν ορίσουμε $\phi(z) = zh(z)$, $z \in V$, τότε η ϕ είναι αναλυτική στο V και

$$f(z) = z^2 g(z) = z^2 h(z)^2 = (zh(z))^2 = \phi(z)^2$$

για κάθε $z \in V$.

4.14. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, r)$ (όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$) με

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = 0, \quad f'''(z_0) \neq 0.$$

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση φ στον $D(z_0, r)$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^3 \varphi(z) \ \text{ για κάθε } z \in D(z_0, r) \ \text{ και } \ \varphi(z_0) \neq 0.$$

(β) Εάν z_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στον $D(z_0, r)$, να δείξετε ότι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = 3.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Taylor, και αφού $f(z_0) = f'(z_0) = f''(0) = 0$, έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-3}.$$

Ορίζουμε

$$\varphi(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}.$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, διότι αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Επιπλέον,

$$\varphi(z) = \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}(z - z_0) + \cdots,$$

άρα

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!} \neq 0.$$

(β) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στον $D(z_0, r)$. Από την $f(z) = (z - z_0)^3 \varphi(z)$ και την $\varphi'(z_0) \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι η φ δεν μηδενίζεται στον $D(z_0, r)$. Επίσης,

$$f'(z) = 3(z - z_0)^2 \varphi(z) + (z - z_0)^3 \varphi'(z),$$

άρα

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{3}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

για κάθε $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Έπεται ότι το z_0 είναι απλός πόλος για την f'/f και

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0}\left((z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \lim_{z \to z_0}\left(3 + (z - z_0)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right) = 3,$$

αφού $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 0 \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} = 0$.

4.15. (α) Έστω f ολόμορφη και φραγμένη στον τρυπημένο ανοικτό δίσκο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ και $0 < r \leqslant \infty$. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f αποδείξτε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

(β) Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \geqslant \frac{1}{|z|}$ για κάθε $z \neq 0$, και $f(1) = 1$. Να δείξετε ότι $f(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \neq 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και θα δείξουμε ότι αν $k < 0$ τότε $a_k = 0$.

Η f είναι φραγμένη στο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(z)| \leqslant M \text{ για κάθε } z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Για κάθε $0 < \delta < r$ θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_\delta(t) = z_0 + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

και αφού για κάθε $z \in \gamma_\delta^*$ έχουμε

$$\left|\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{M}{\delta^{k+1}},$$

από την ML-ανισότητα έπεται ότι

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\delta^{k+1}}2\pi\delta = \frac{M}{\delta^k}.$$

Έστω τώρα $k < 0$. Για κάθε $0 < \delta < r$ έχουμε

$$|a_k| \leqslant M \cdot \delta^{-k}$$

και $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \delta^{-k} = 0$ διότι $-k > 0$, άρα $a_k = 0$.

(β) Θεωρούμε την $g = 1/f$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ αφού $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \neq 0$, και $g(1) = 1$. Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι $|g(z)| \leqslant |z|$ για κάθε $z \neq 0$, άρα

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| \leqslant 1, \qquad z \neq 0.$$

Δηλαδή, η $h(z) = g(z)/z$ είναι ολόμορφη και φραγμένη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από το (α) το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο για την h, άρα η h επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση $h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, η οποία ικανοποιεί την $|h_1(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα Liouville, η h_1 είναι σταθερή και ίση με $g(1)/1 = 1$ αφού $g(1) = 1$. Δηλαδή,

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{h(z)}{z} = \frac{1}{z}$$

για κάθε $z \neq 0$.

4.16. Έστω $\frac{z}{e^z-1} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi < |z| < 4\pi\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_0 και a_{-2}.

Υπόδειξη. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ είναι τα $z_k = 2k\pi i$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ (σε αυτά τα σημεία μηδενίζεται η $e^z - 1$). Από το θεώρημα Laurent ο συντελεστής a_n δίνεται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z/(e^z - 1)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{1}{z^n(e^z - 1)} dz,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα $r \in (2\pi, 4\pi)$ και θετική φορά διαγραφής περιέχεται στον δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και $\pm 2\pi i$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

Για τον a_0 έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{1}{e^z - 1} dz.$$

Τα σημεία 0 και $\pm 2\pi i$ είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{1}{e^z-1}$, οπότε το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων μας δίνει

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{e^z-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z-1},-2\pi i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z-1},0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z-1},2\pi i\right)\\ &= \frac{1}{(e^z-1)'}\bigg|_{z=-2\pi i}+\frac{1}{(e^z-1)'}\bigg|_{z=0}+\frac{1}{(e^z-1)'}\bigg|_{z=2\pi i}\\ &= 1+1+1=3. \end{aligned}$$

Για τον a_{-2} έχουμε

$$a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^2}{e^z-1}\,dz.$$

Τα σημεία $\pm 2\pi i$ είναι απλοί πόλοι της $g(z)=\frac{z^2}{e^z-1}$, ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^2}{e^z-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{e^z-1},-2\pi i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{e^z-1},2\pi i\right)\\ &= \frac{z^2}{(e^z-1)'}\bigg|_{z=-2\pi i}+\frac{z^2}{(e^z-1)'}\bigg|_{z=2\pi i}\\ &= (-2\pi i)^2+(2\pi i)^2=-8\pi^2. \end{aligned}$$

4.17. Έστω $\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z)=\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$ στον δακτύλιο $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ με κέντρο το $z_0=0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n για κάθε $n\leqslant -1$.

Υπόδειξη. Έχουμε $\sin(\pi z)=0$ αν και μόνο αν $z=k$, όπου $k\in\mathbb{Z}$. Οι $z_k=k$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent, ο συντελεστής a_n δίνεται από το τύπο

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z(z^2-1)/\sin(\pi z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin(\pi z)}\,dz,$$

όπου ο κύκλος $|z|=r$ με κέντρο 0, ακτίνα $r\in(1,2)$ και θετική φορά διαγραφής περιέχεται στον δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ±1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=r$.

Για $n=-1$ έχουμε

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)}\,dz.$$

Τα σημεία 0 και ±1 είναι απλοί πόλοι της $h(z)=\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)}\,dz\\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)},-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)},0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin(\pi z)},1\right)\\ &= \lim_{z\to-1}z(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2+\lim_{z\to0}(z^2-1)\left(\frac{z}{\sin(\pi z)}\right)^2+\lim_{z\to1}z(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2\\ &= 2\lim_{z\to-1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2-\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2+2\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2\\ &= 2\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+2\frac{1}{\pi^2}=\frac{3}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Για $n\leqslant -2$ έχουμε

$$a_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}h(z)\,dz$$

με

$$h(z) = \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin(\pi z)}, \quad \text{όπου} \quad -n \geqslant 2.$$

Τα σημεία ±1 είναι απλοί πόλοι της h, ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin(\pi z)}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin(\pi z)}, 1\right) \\ &= \lim_{z\to -1} z^{-n}(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2 + \lim_{z\to 1} z^{-n}(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\ &= -2(-1)^{-n}\lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 + 2\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 \\ &= 2(-1)^{-n+1}\frac{1}{\pi^2} + 2\frac{1}{\pi^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή $a_n = \frac{4}{\pi^2}$ αν ο n είναι περιττός και $a_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος.

4.18. Έστω $\frac{z^2}{\sin(\pi z)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z^2}{\sin(\pi z)}$ στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n για κάθε $n \leqslant 1$.

Υπόδειξη. Έχουμε $\sin(\pi z) = 0$ αν και μόνο αν $z = k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Οι $z_k = k$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent, ο συντελεστής a_n δίνεται από το τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z^2/\sin(\pi z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}\, dz,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα $r \in (1,2)$ και θετική φορά διαγραφής περιέχεται στον δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ±1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

Για $n = 1$ έχουμε

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz.$$

Τα σημεία 0 και ±1 είναι απλοί πόλοι της $h(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 1\right) \\ &= \frac{1}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=-1} + \frac{1}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=0} + \frac{1}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=1} \\ &= \frac{1}{\pi\cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi\cos(0)} + \frac{1}{\pi\cos(\pi)} \\ &= -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Για $n \leqslant 0$ έχουμε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} h(z)\, dz$$

με

$$h(z) = \frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}, \quad \text{όπου} \quad -n+1 \geqslant 1.$$

Τα σημεία ±1 είναι απλοί πόλοι της h, ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)},-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)},1\right)\\ &= \frac{z^{-n+1}}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=-1}+\frac{z^{-n+1}}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=1}\\ &= \frac{(-1)^{-n+1}}{\pi\cos(-\pi)}+\frac{1}{\pi\cos(\pi)}\\ &= \frac{(-1)^{-n}}{\pi}-\frac{1}{\pi}, \end{aligned}$$

δηλαδή $a_n = -\frac{2}{\pi}$ αν ο n είναι περιττός και $a_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος.

4.19. Έστω $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ τα αναπτύγματα Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$$

στους δακτύλιους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, αποδείξτε ότι $d_n - c_n = -\frac{1}{\pi}((-1)^{-n-1}+1)$ για κάθε ακέραιο n.

Υπόδειξη. Αν η f είναι αναλυτική στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ τότε αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{για κάθε } z \in \Delta,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απολύτως στον Δ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Δ. Ο συντελεστής a_n δίνεται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα $r \in (R_1, R_2)$ και θετική φορά διαγραφής περιέχεται στον δακτύλιο Δ.

Στον δακτύλιο Δ_1 έχουμε

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_1}\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\,dz \quad \text{με } 0 < r_1 < 1.$$

Το 0 είναι το μοναδικό μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $g(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}$ στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r_1$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων,

$$c_n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, 0\right).$$

Στον δακτύλιο Δ_2 έχουμε

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n,$$

όπου

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2}\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\,dz \quad \text{με } 1 < r_2 < 2.$$

Τα $0, \pm 1$ είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}$ στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r_2$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων,

$$d_n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}, 1\right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} d_n - c_n &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}, 1\right) \\ &= \frac{z^{-n-1}}{(\sin\pi z)'}\Big|_{z=-1} + \frac{z^{-n-1}}{(\sin\pi z)'}\Big|_{z=1} \\ &= \frac{(-1)^{-n-1}}{\pi\cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi\cos\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}((-1)^{-n-1} + 1). \end{aligned}$$

4.20. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^2\sin(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \geqslant 1$. Υπάρχει το $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f είναι το 0; Υπολογίστε το $\operatorname{Res}(f, 0)$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = z\cos(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} g(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \geqslant 1$. Υπάρχει το $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της g είναι το 0; Υπολογίστε το $\operatorname{Res}(g, 0)$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $z_n \to 0$ και $\zeta_n \to 0$. Από την $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ βλέπουμε ότι

$$g(z_n) = -\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{i}\right) = i\frac{e^n - e^{-n}}{2n^2} \quad \text{και} \quad g(\zeta_n) = \frac{\sin n}{n^2}.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = i\lim_{n\to\infty}\frac{e^n - e^{-n}}{2n^2} = \infty$$

και

$$\lim_{n\to\infty} g(\zeta_n) = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι το $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$ δεν υπάρχει (ούτε ισούται με ∞). Επομένως, το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από την

$$g(z) = z^2\sin(1/z) = z^2\left(z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right) = z^3 - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \cdots$$

βλέπουμε ότι $\operatorname{Res}(g, 0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

(β) Έχουμε $z_n \to 0$ και $\zeta_n \to 0$. Από την $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ βλέπουμε ότι

$$g(z_n) = \frac{i}{n}\cos\left(\frac{n}{i}\right) = i\frac{e^n + e^{-n}}{2n} \quad \text{και} \quad g(\zeta_n) = \frac{\cos n}{n}.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = i\lim_{n\to\infty}\frac{e^n + e^{-n}}{2n} = \infty$$

και

$$\lim_{n\to\infty} g(\zeta_n) = 0.$$

Αυτό δείχνει ότι το $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$ δεν υπάρχει (ούτε ισούται με ∞). Επομένως, το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από την

$$g(z) = z\cos(1/z) = z\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \cdots\right) = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \cdots$$

βλέπουμε ότι $\operatorname{Res}(g,0) = -\frac{1}{2}$.

4.21. Διατυπώστε το θεώρημα Laurent για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$ στον δακτύλιο

$$\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\right\}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, υπολογίστε τους συντελεστές των z^{-1} και z^{-2} στο ανάπτυγμα Laurent της f στον δακτύλιο Δ.

Υπόδειξη. Η $f(z) = 1/\cos \pi z$ είναι αναλυτική στον δακτύλιο Δ και αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\frac{1}{\cos \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{για κάθε } z \in \Delta,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απολύτως στον Δ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Δ. Ο συντελεστής a_n δίνεται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z^{n+1}\cos \pi z}\,dz,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα $r \in (1/2, 3/2)$ και θετική φορά διαγραφής περιέχεται στον δακτύλιο Δ.

Για $n = -1$ έχουμε

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{\cos \pi z}\,dz.$$

Τα ανώμαλα σημεία $-1/2$ και $1/2$ της $f(z) = 1/\cos \pi z$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{\cos \pi z}\,dz = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos \pi z}, -\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=-1/2} + \frac{1}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=1/2} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Για $n = -2$ έχουμε

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{1}{z^{-1}\cos \pi z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{z}{\cos \pi z}\,dz.$$

Τα ανώμαλα σημεία $-1/2$ και $1/2$ της $f(z) = z/\cos \pi z$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,r)} \frac{z}{\cos \pi z}\,dz = \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos \pi z}, -\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{z}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=-1/2} + \frac{z}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

4.22. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z - z_0| < R$ και δεν είναι αναλυτική στο z_0.

(i) Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, αποδείξτε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $N+1$ της f'.

(ii) Πότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f; Δώστε τουλάχιστον δύο ικανές και αναγκαίες συνθήκες γι' αυτό.

Υπόδειξη. (i) Το z_0 είναι πόλος τάξης N της f αν και μόνο αν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στον δίσκο $D(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}$, τέτοια ώστε $g(z_0)\neq 0$ και

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^N}\quad\text{για κάθε}\ \ z\in D(z_0,R),\ z\neq z_0.$$

Τότε,

$$f'(z)=\frac{(z-z_0)g'(z)-Ng(z)}{(z-z_0)^{N+1}}\quad\text{για κάθε}\ \ z\in D(z_0,R),\ z\neq z_0.$$

Επομένως,

$$f'(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^{N+1}}\quad\text{για κάθε}\ \ z\in D(z_0,R),\ z\neq z_0,$$

όπου η συνάρτηση $h(z):=(z-z_0)g'(z)-Ng(z)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0,R)$ και $h(z_0)=-Ng(z_0)\neq 0$. Έπεται ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $N+1$ της f'.

(ii) Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν στο ανάπτυγμα Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad 0<|z-z_0|<r$$

έχουμε $a_n=0$ για κάθε $n\leqslant -1$. Δηλαδή, αν

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad 0<|z-z_0|<r.$$

4.23. (α) Να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z)=\left(\frac{3}{z^2}-\frac{\sin 3z}{z^3}\right)\exp\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1}f(z)\,dz.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$f(z)=\frac{3z-\sin 3z}{z^3}\exp\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

Αν $\phi(z)=3z-\sin 3z$, τότε $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=0$ και $\phi^{(3)}(0)=27\neq 0$. Επομένως, το 0 είναι ρίζα τάξης 3 για την ϕ και ρίζα τάξης 3 για την $\psi(z)=z^3$. Έπεται ότι το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο για την f.

Για το σημείο 2 παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}f(2+1/n)=+\infty\quad\text{και}\quad\lim_{n\to\infty}f(2-1/n)=0,$$

δηλαδή το $\lim_{z\to 2}f(z)$ δεν υπάρχει. Επομένως, το 2 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο για την f.

(β) Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων βλέπουμε ότι

$$\int_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0)=0.$$

4.24. Έστω $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$ και f,g δύο συναρτήσεις ολόμορφες στον τρυπημένο δίσκο $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, αποδείξτε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f+g$.

Υπόδειξη. Έστω ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $k \geqslant 1$ για την g. Τότε,

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k},$$

όπου η h είναι ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $D(z_0, r)$ με $h(z_0) \neq 0$. Αν υποθέσουμε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f + g$, τότε από την

$$f(z) = (f(z) + g(z)) - g(z) = (f(z) + g(z)) - \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$$

στον $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ βλέπουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης k για την f, άτοπο. Αν υποθέσουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $m \geqslant 1$ για την $f + g$, τότε

$$f(z) + g(z) = \frac{H(z)}{(z - z_0)^m},$$

όπου η H είναι ολόμορφη συνάρτηση στον $D(z_0, r)$ με $H(z_0) \neq 0$. Τότε,

$$f(z) = (f(z) + g(z)) - g(z) = \frac{H(z)}{(z - z_0)^m} - \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$$

στον $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, άρα το z_0 είναι πόλος της f ή επουσιώδες ανώμαλο σημείο για την f, άτοπο.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο για την $f + g$.

4.25. Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ αναλυτική και φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(z)| \leqslant M$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Αν $k \in \mathbb{Z}$ τότε η f είναι αναλυτική στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z - k| < 1$ με κέντρο τον k, άρα ο k είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Δηλαδή,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - k)^n, \qquad \text{για } 0 < |z - k| < 1.$$

Αφού $\lim\limits_{z \to k} f(z) = a_0$, συμπεραίνουμε ότι $|a_0| \leqslant M$. Αν ορίσουμε $f(k) = a_0$, τότε παίρνουμε μια συνάρτηση αναλυτική στο k. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, η f επεκτείνεται αναλυτικά σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$. Παίρνουμε έτσι μια ακέραια συνάρτηση f τέτοια ώστε $|f(z)| \leqslant M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα Liouville, η f είναι σταθερή.

4.26. (α) Έστω g ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 \sin z},$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή U του 0 τέτοια ώστε $\frac{1}{g} \in \mathcal{H}(U)$. Ορίζουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3 g(z)}, \qquad z \in U.$$

Τότε,

$$\lim_{z \to 0} (z^3 f(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)} \neq 0,$$

άρα το 0 είναι πόλος τάξης 3 για την f. Επομένως,

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{g(z)}\right)'' = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$z^2 \sin z = z^2\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = z^3 g(z),$$

όπου

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και από το παραπάνω ανάπτυγμα βλέπουμε ότι

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = \frac{1}{3}.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3 g(z)} = f(z)$$

είναι το 0 και οι $k\pi$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 και τα $\pm\pi$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ. Επομένως,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi) + \mathrm{Res}(f,-\pi)).$$

Από το (α) έχουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3} = -\frac{g''(0)}{2[g(0)]^2} = -\frac{1}{6}.$$

Υπολογίζουμε και τα

$$\mathrm{Res}(f,\pm\pi) = \lim_{z\to\pm\pi}\frac{1/z^2}{(\sin z)'} = -\frac{1}{\pi^2},$$

οπότε, τελικά,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right).$$

4.27. (α) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z) \ \text{ για κάθε } \ z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}\,dz,$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\sin z = \sin(\pi - z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi - z)^{2n+1} = (\pi - z)\varphi(z)$$

όπου

$$\varphi(z) = 1 - \frac{(\pi - z)^2}{3!} + \frac{(\pi - z)^4}{5!} - \cdots.$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, με $\varphi(\pi) = 1$ και $\varphi'(\pi) = 0$.

(β) Τα ανώμαλα σημεία της $f(z)=\frac{e^z-1}{\sin^2 z}$ στο εσωτερικό της γ^* είναι τα $0,\pi$ και $-\pi$. Επομένως,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,\pi)+\mathrm{Res}(f,-\pi)).$$

Για τον υπολογισμό του $\mathrm{Res}(f,0)$ γράφουμε

$$f(z)=\frac{z+z^2/2!+z^3/3!+\cdots}{(z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots)^2}=\frac{1+z/2!+z^2/3!+\cdots}{z(1-z^2/3!+z^4/5!-\cdots)^2}=\frac{1}{z}\psi(z),$$

όπου $\psi=A/B^2$, $A(z)=1+z/2!+z^2/3!+\cdots$, $B(z)=1-z^2/3!+z^4/5!-\cdots$. Παρατηρούμε ότι $B(0)=1\neq 0$, άρα η ψ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 και αφού $\psi(0)=1\neq 0$ το 0 είναι απλός πόλος της f και

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}(zf(z))=1.$$

Για τον υπολογισμό του $\mathrm{Res}(f,\pi)$, χρησιμοποιώντας το (α) γράφουμε $\sin z=(\pi-z)\varphi(z)$ άρα

$$f(z)=\frac{e^z-1}{(\pi-z)^2\varphi(z)^2}=\frac{1}{(\pi-z)^2}h(z),$$

όπου η $h(z)=\frac{e^z-1}{\varphi(z)^2}$ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του π και $h(\pi)\neq 0$. Επομένως, το π είναι πόλος τάξης 2 και έχουμε

$$\mathrm{Res}(f,\pi)=h'(\pi).$$

Όμοια υπολογίζουμε το $\mathrm{Res}(f,-\pi)$, γράφοντας αρχικά $\sin z=-\sin(\pi+z)=(\pi+z)\Phi(z)$ για κάποια ολόμορφη συνάρτηση $\Phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

4.28. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma h(z)\,dz,$$

όπου

$$h(z)=\frac{1}{1-\cos z}+\bar{z}z^{12}\cos(1/z^3),\quad \gamma(t)=e^{it},\quad t\in[0,2\pi].$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $h(z)=f(z)+g(z)$, όπου $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ και $g(z)=\bar{z}z^{12}\cos(1/z^3)$. Τότε,

$$\int_\gamma h(z)\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz+\int_\gamma g(z)\,dz.$$

Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $z_k=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, και από αυτά μόνο το 0 ανήκει στο $\mathrm{int}(\gamma^*)$, άρα

$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\mathrm{Res}(f,0).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{1-(1-z^2/2!+z^4/4!-\cdots)}=\frac{1}{z^2/2!-z^4/4!+z^6/6!-\cdots}\\&=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1/2!-z^2/4!+z^4/6!-\cdots}=\frac{\psi(z)}{z^2},\end{aligned}$$

όπου $\psi=1/\varphi$ και η $\varphi(z)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, με $\varphi(0)=\frac{1}{2}\neq 0$ και $\varphi'(0)=0$. Επομένως, η ψ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 και $\psi(0)\neq 0$, το οποίο δίχνει ότι το 0 είναι πόλος τάξης 2 για την f. Συνεπώς,

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}(z^2f(z))'=\psi'(0)=-\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)^2}=0.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $z \in \gamma^*$ έχουμε $|z| = 1$, άρα

$$g(z) = \bar{z}z^{12}\cos\left(\frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{z}z^{12}\cos\left(\frac{1}{z^3}\right) = z^{11}\cos\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

συνεπώς

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \vartheta(z)\,dz,$$

όπου

$$\vartheta(z) = z^{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-6n}}{(2n)!} = z^{11} - \frac{1}{2!}z^5 + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^7} + \cdots,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $\mathrm{Res}(\vartheta, 0) = \frac{1}{4!}$. Επομένως,

$$\int_\gamma \vartheta(z)\,dz = \frac{2\pi i}{4!} = \frac{\pi i}{12}$$

και τελικά

$$\int_\gamma h(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz = 0 + \frac{\pi i}{12} = \frac{\pi i}{12}.$$

4.29. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (1 - z^2)e^{1/z}dz,$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. Το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της $f(z) = (1 - z^2)e^{1/z}$ στο $\mathrm{int}(\gamma^*)$, άρα

$$\int_\gamma (1 - z^2)e^{1/z}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 0).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 - z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n} = -z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right)\frac{1}{z^n}, \end{aligned}$$

άρα $\mathrm{Res}(f, 0) = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$ και

$$\int_\gamma (1 - z^2)e^{1/z}dz = 2\pi i\,\frac{5}{6} = \frac{5\pi i}{3}.$$

4.30. Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και έστω C η καμπύλη με εξίσωση $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$, όπου $0 < r < 1$. Αν το 0 είναι απλή ρίζα της συνάρτησης f, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$

με δύο τρόπους: (i) με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, και (ii) με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Υπόδειξη. Ο δείκτης στροφής της κλειστής καμπύλης C ως προς το σημείο 0 είναι $I(C, 0) = 2$.

(i) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz\right) = \frac{1}{2}I(C,0)\cdot f''(0) = f''(0).$$

(ii) Επειδή το 0 είναι απλή ρίζα της f, δηλαδή $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ και το 0 είναι ρίζα τάξης 3 της z^3, συμπεραίνουμε ότι το 0 είναι πόλος τάξης 2 της $f(z)/z^3$. Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, εφαρμόζοντας και τον κανόνα L'Hôpital, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz &= I(C,0)\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^3},0\right) = 3\cdot\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{f(z)}{z^3}\right]' \\ &= 2\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{f(z)}{z}\right]' = 2\cdot\lim_{z\to 0}\frac{zf'(z)-f(z)}{z^2} \\ &= 2\cdot\lim_{z\to 0}\frac{zf''(z)}{2z} = f''(0).\end{aligned}$$

4.31. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \exp\left(\frac{z+1/z}{2}\right).$$

Αν $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της g στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z| < \infty$, υπολογίστε τον συντελεστή c_0 και αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}dt = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}.$$

Υπόδειξη. Το 0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της g. Αφού

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} \quad \text{για κάθε } w\in\mathbb{C},$$

το ανάπτυγμα Laurent της $g(z) = e^{z/2}\cdot e^{1/(2z)}$ στον τρυπημένο δίσκο $0 < |z| < \infty$ είναι

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(1+\frac{z/2}{1!}+\frac{(z/2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z/2)^n}{n!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{1!(2z)}+\frac{1}{2!(2z)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(2z)^n}+\cdots\right) \\ &= \cdots+\left(1+\frac{1}{4(1!)^2}+\frac{1}{4^2(2!)^2}+\cdots+\frac{1}{4^n(n!)^2}+\cdots\right)+\cdots \\ &= \cdots+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}+\cdots, \end{aligned}$$

άρα

$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}.$$

Όμως, από το θεώρημα Laurent,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{g(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{(z+1/z)/2}}{z}\,dz.$$

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ και $dz = ie^{it}dt$, άρα

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(e^{it}+e^{-it})/2}}{e^{it}}\,ie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos t}dt,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}.$$

4.32. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)((z-1)^2+4)}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στον μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2-2i$.

(β) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx.$$

Υπόδειξη. (α) Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα 1, $1+2i$ και $1-2i$. Επομένως, έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1| < \infty\}$. Το σημείο $2-2i$ ανήκει στον δακτύλιο Δ_2. Χρησιμοποιώντας την $1/(1+w) = \sum_{n-0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, βλέπουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \frac{1}{1+4/(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{(z-1)^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{1}{(z-1)^{2n+3}}.$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο ισχύει αυτό το ανάπτυγμα Laurent για την f είναι ο Δ_2.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+4}\, dx\right).$$

Τα σημεία $\pm 2i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^4+4}$. Το $2i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{z^2+4}, 2i\right) = \lim_{z\to 2i} (z-2i) \frac{e^{3iz}}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{e^{-6}}{2i}.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο γ_R του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο ώστε το σημείο $2i$ να βρίσκεται στο εσωτερικό αυτής της καμπύλης. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{3ix}}{x^2+4}\, dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+4}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{z^2+4}, 2i\right) = \frac{e^{-6}\pi}{2}.$$

Από το λήμμα Jordan,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+4}\, dz = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{3ix}}{x^2+4}\, dx = \frac{e^{-6}\pi}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+4}\, dx\right) = \frac{e^{-6}\pi}{2}.$$

4.33. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ και $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $z^{k+1} + z + 1 = 0$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ.

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz\right|=0,$$
όπου $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $R>0$.

Τέλος, δείξτε ότι
$$\int_\gamma\frac{z^k}{z^{k+1}+z+1}\,dz=2\pi i.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει ρίζα ρ της $z^{k+1}+z+1=0$ με $|\rho|\geqslant 2$. Τότε, $1+\frac{1}{\rho^k}+\frac{1}{\rho^{k+1}}=0$, ενώ
$$\left|1+\frac{1}{\rho^k}+\frac{1}{\rho^{k+1}}\right|\geqslant 1-\frac{1}{|\rho|^k}-\frac{1}{|\rho|^{k+1}}\geqslant 1-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0,$$
και καταλήγουμε σε άτοπο.

(β) Για $z\in\gamma_R^*$ έχουμε ότι
$$|z(z^{k+1}+z+1)|=R|z^{k+1}+z+1|\geqslant R(|z|^{k+1}-|z|-1)=R(R^{k+1}-R-1),$$
άρα
$$\left|\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\right|\leqslant\frac{R+1}{R(R^{k+1}-R-1)}.$$
Από την ML-ανισότητα παίρνουμε ότι
$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz\right|\leqslant 2\pi R\cdot\frac{R+1}{R(R^{k+1}-R-1)}=\frac{2\pi(R+1)}{R^{k+1}-R-1}\longrightarrow 0$$
όταν $R\to\infty$, άρα
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz\right|=0.$$
Θεωρούμε τώρα την
$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z^k}{z^{k+1}+z+1}=\frac{z^{k+1}}{z(z^{k+1}+z+1)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{z+1}{z^{k+1}+z+1}\right)\\&=\frac{1}{z}-\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}.\end{aligned}$$
Από το (α), για κάθε $R>2$ η f είναι ολόμορφη στο χωρίο που περιβάλλεται από τις γ^* και γ_R^*. Από την αρχή της παραμόρφωσης,
$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z}-\int_{\gamma_R}\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz\longrightarrow\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z}$$
όταν $R\to\infty$, από το (β). Συνεπώς,
$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i.$$

4.34. (α) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $z_0\in\mathbb{C}$ με $f(z_0)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\varphi(z_0)=f'(z_0)$, $\varphi'(z_0)=f''(z_0)/2$ και $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma\frac{z}{(e^z-e^{-z})^2}\,dz,$$
όπου $\gamma(t)=4e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Taylor, και αφού $f(z_0) = 0$, έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}.$$

Ορίζουμε

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}.$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, διότι αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Επιπλέον,

$$\varphi(z) = f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0) + \cdots ,$$

άρα

$$\varphi(z_0) = f'(z_0) \quad \text{και} \quad \varphi'(z_0) = \frac{f''(z_0)}{2}.$$

(β) Θέτουμε $f(z) = e^z - e^{-z}$ και $g(z) = z/f(z)^2$. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^z = e^{-z}$ ή ισοδύναμα της $e^{2z} = 1$, δηλαδή τα σημεία

$$0, \pm\pi i, \pm 2\pi i, \ldots .$$

Από αυτά, μόνο τα 0, $\pm\pi i$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ^*. Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = f(\pm\pi i) = 0, \quad f'(0) = 2, \quad f'(\pm\pi i) = -2, \quad f''(\pm\pi i) = 0.$$

Από το (α), για $z_0 = \pm\pi i$, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$ και

$$\varphi(z_0) = f'(z_0) = -2, \qquad \varphi'(z_0) = \frac{f''(z_0)}{2} = 0.$$

Τότε, για την $g(z) = \frac{z}{(z-z_0)^2\varphi(z)^2}$ έχουμε ότι

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^2 g(z) = \frac{z_0}{\varphi(z_0)^2} \neq 0,$$

άρα το z_0 είναι πόλος τάξης 2 για την g και

$$\operatorname{Res}(g, z_0) = \left(\frac{z}{\varphi(z)^2}\right)'\bigg|_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)^2 - 2z_0\varphi'(z_0)\varphi(z_0)}{\varphi(z_0)^4} = \frac{1}{\varphi(z_0)^2} = \frac{1}{4}.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{z\to 0}(zg(z)) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z - 0}{f(z) - f(0)}\right)^2 = \frac{1}{f'(0)^2} = \frac{1}{4},$$

δηλαδή $\operatorname{Res}(g, 0) = \frac{1}{4}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(z)\,dz &= 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}(g, -\pi i) + \operatorname{Res}(g, 0) + \operatorname{Res}(g, \pi i)) \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi i}{2}.\end{aligned}$$

4.35. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση e^z/z πάνω στον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z| = 1$, να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt = 2\pi \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\,dt = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f(z) = e^z/z$. Το 0 είναι πόλος τάξης 1 για την f (αφού $\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} e^z = 1$) και $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$. Συνεπώς,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, 0) = 2\pi i.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi i = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t))\frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\, dt - \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\, dt. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\, dt = 2\pi \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\, dt = 0.$$

4.36. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $\varphi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε $\varphi(2\pi i) = \psi(-2\pi i) = 1$, $\varphi'(2\pi i) = \psi'(-2\pi i) = 1/2$ και $e^z - 1 = (z - 2\pi i)\varphi(z) = (z + 2\pi i)\psi(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{z}{(e^z - 1)^2}\, dz,$$

όπου $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $w \in \mathbb{C}$ έχουμε $e^w - 1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{w^n}{n!} = w\sum_{n=1}^\infty \frac{w^{n-1}}{n!}$, άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ μπορούμε να γράψουμε

$$e^z - 1 = e^{z-2\pi i} - 1 = (z - 2\pi i)\varphi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(z-2\pi i)^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{z - 2\pi i}{2!} + \frac{(z-2\pi i)^2}{3!} + \cdots .$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ διότι αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{C}$, και

$$\varphi(2\pi i) = 1, \qquad \varphi'(2\pi i) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Επίσης, για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 = e^{z+4\pi i} - 1 = (z + 2\pi i)\varphi(z + 4\pi i).$$

Ορίζουμε $\psi(z) = \varphi(z + 4\pi i)$. Τότε, η ψ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $e^z - 1 = (z + 2\pi i)\psi(z)$, και

$$\psi(-2\pi i) = \varphi(2\pi i) = 1, \quad \psi'(-2\pi i) = \varphi'(2\pi i) = \frac{1}{2}.$$

(β) Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = \frac{z}{(e^z-1)^2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^z = 1$, δηλαδή οι

$$0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \pm 6\pi i, \ldots$$

Από αυτά τα σημεία, μόνο οι 0, $\pm 2\pi i$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ^*. Επομένως,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, 2\pi i) + \mathrm{Res}(f, -2\pi i)).$$

Για να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(f, 0)$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 0}(zf(z)) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0,$$

άρα το 0 είναι απλός πόλος της f και

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

Για να υπολογίσουμε το $\operatorname{Res}(f, 2\pi i)$ χρησιμοποιούμε το (α). Έχουμε

$$\lim_{z\to 2\pi i}((z-2\pi i)^2 f(z)) = \lim_{z\to 2\pi i}\frac{z}{\varphi(z)^2} = 2\pi i \neq 0,$$

άρα το $2\pi i$ είναι πόλος τάξης 2 για την f και

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 2\pi i) &= \lim_{z\to 2\pi i}((z-2\pi i)^2 f(z))' \\ &= \left(\frac{z}{\varphi(z)^2}\right)'\Big|_{z=2\pi i} = \frac{\varphi(z)^2 - 2z\varphi(z)\varphi'(z)}{[\varphi(z)]^4}\Big|_{z=2\pi i} \\ &= \frac{\varphi(2\pi i) - 2\cdot 2\pi i\varphi'(2\pi i)}{[\varphi(2\pi i)]^3} = \frac{1-4\pi i\cdot(1/2)}{1^3} = 1-2\pi i.\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το $\operatorname{Res}(f, -2\pi i)$ χρησιμοποιούμε και πάλι το (α). Όπως πριν, βλέπουμε ότι το $-2\pi i$ είναι πόλος τάξης 2 για την f και

$$\operatorname{Res}(f, -2\pi i) = \frac{\psi(-2\pi i) - 2(-2\pi i)\psi'(-2\pi i)}{[\psi(-2\pi i)]^3} = 1+2\pi i.$$

Τελικά,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(1+1-2\pi i+1+2\pi i) = 6\pi i.$$

4.37. Για κάθε $n \geqslant 1$ να λυθεί η εξίσωση $2z^n - i = 0$, και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^{n-1}}{2z^n - i}\,dz.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $2z^n - i = 0$ αν και μόνο αν $z^n = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$, άρα οι ρίζες της εξίσωσης $2z^n - i = 0$ είναι οι

$$z_k = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}e^{i\frac{2k\pi+\pi/2}{n}}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Οι z_k είναι απλές ρίζες της εξίσωσης και $|z_k| = 1/\sqrt[n]{2} < 1$, άρα οι z_k είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = z^{n-1}/(2z^n - i)$ που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}I &= \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{2z^n - i}, z_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^{n-1}}{(2z^n - i)'}\Big|_{z=z_k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_k^{n-1}}{2nz_k^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4.38. (α) Έστω g ολόμορφη σε μια περιοχή του 0, με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z - 1)\sin z}, \qquad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi].$$

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή U του 0 τέτοια ώστε $\frac{1}{g} \in \mathcal{H}(U)$. Ορίζουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3 g(z)}, \qquad z \in U.$$

Τότε,

$$\lim_{z\to 0}(z^3 f(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)} \neq 0,$$

άρα το 0 είναι πόλος τάξης 3 για την f. Επομένως,

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{g(z)}\right)'' = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

(β) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$z(e^z-1)\sin z = z\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = z^3 g(z),$$

όπου

$$g(z) = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2!}z + 0\cdot z^2 + \cdots,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και από το παραπάνω ανάπτυγμα βλέπουμε ότι

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = \frac{1}{2}, \quad g''(0) = 0.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της

$$\frac{1}{z(e^z-1)\sin z} = \frac{1}{z^3 g(z)} = f(z)$$

είναι το 0 και οι $2k\pi i, k\pi$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Επομένως,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0).$$

Από το (α) έχουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3} = \frac{1}{4},$$

άρα, τελικά,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

4.39. Να υπολογίσετε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=4}\left(\frac{1}{z\sin z} + z^3\cos(1/z^2)\right)dz.$$

Υπόδειξη. Υπολογίζουμε πρώτα το $\int_{|z|=4}\frac{1}{z\sin z}\,dz$. Για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z\sin z}$ έχουμε ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 4$ είναι τα 0 και $\pm\pi$, άρα

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi) + \mathrm{Res}(f,-\pi)).$$

Γράφουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^2\varphi(z)}, \quad \text{όπου } \varphi(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \cdots.$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\varphi(0) = 1 \neq 0$, άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 για την f και

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \left(\frac{1}{\phi(z)}\right)'\Big|_{z=0} = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)^2} = 0.$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{Res}(f,\pi) = \frac{1/z}{(\sin z)'}\Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

και

$$\mathrm{Res}(f,-\pi) = \frac{1/z}{(\sin z)'}\Big|_{z=-\pi} = \frac{1}{\pi},$$

άρα τελικά

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{z\sin z}\,dz = 0.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $\int_{|z|=4} z^3\cos(1/z^2)\,dz$. Το μοναδικό ανώμαλο σημείο της $g(z) = z^3\cos(1/z^2)$ είναι το 0, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 4$. Για $z \neq 0$ έχουμε

$$z^3\cos(1/z^2) = z^3\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \cdots\right) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^3} + \cdots,$$

άρα $\mathrm{Res}(g,0) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Έπεται ότι

$$\int_{|z|=4} g(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi i}{12}.$$

Τελικά,

$$\int_{|z|=4}\left(\frac{1}{z\sin z} + z^3\cos(1/z^2)\right)dz = \int_{|z|=4} f(z)\,dz + \int_{|z|=4} g(z)\,dz = \frac{\pi i}{12}.$$

4.40. Εάν $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{\overline{z}e^{z^2}}{z^4}\,dz, \quad \int_\gamma z^7\cos\frac{1}{z^2}\,dz, \quad \int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{(1-\cos z)^2}\,dz.$$

Υπόδειξη. (i) Για $|z| = 1$ έχουμε $\overline{z} = 1/z$, άρα

$$I = \int_\gamma \frac{\overline{z}e^{z^2}}{z^4}\,dz = \int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^5}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{z^5}, 0\right).$$

Για $z \neq 0$ έχουμε

$$\frac{1}{z^5}e^{z^2} = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \cdots,$$

άρα

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{z^5}, 0\right) = \frac{1}{2},$$

και έπεται ότι

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

(ii) Για $z \neq 0$ έχουμε ότι

$$z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^7\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^8} - \cdots\right) = z^7 - \frac{z^3}{2} + \frac{1}{24}\frac{1}{z} - \cdots,$$

άρα
$$\mathrm{Res}\left(z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right),0\right)=\frac{1}{24}.$$
Έπεται ότι
$$\int_\gamma z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right),0\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{24}=\frac{\pi i}{12}.$$

(iii) Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ έχουμε
$$e^z-1-z=z^2\varphi(z)\quad\text{όπου}\quad\varphi(z)=\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$
και
$$1-\cos z=z^2\psi(z)\quad\text{όπου}\quad\psi(z)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\cdots.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\varphi(0)=\frac{1}{2},\quad\varphi'(0)=\frac{1}{6},\quad\psi(0)=\frac{1}{2}\quad\text{και}\quad\psi'(0)=0.$$
Γράφουμε
$$f(z)=\frac{e^z-1-z}{(1-\cos z)^2}=\frac{\varphi(z)}{z^2\psi(z)^2},$$
και ελέγχουμε ότι
$$\lim_{z\to 0}(z^2f(z))=\frac{\varphi(0)}{\psi(0)^2}\neq 0,$$
άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 για την f. Υπολογίζουμε το
$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}(z^2f(z))'=\frac{\varphi'(0)\psi(0)^2-2\varphi(0)\psi(0)\psi'(0)}{]\psi(0)]^4}=\frac{\varphi'(0)}{\psi(0)^2}=\frac{1/6}{1/4}=\frac{2}{3}.$$
Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $z=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, και από αυτά μόνο το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ^*. Έπεται ότι
$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0)=\frac{4\pi i}{3}.$$

4.41. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{1+x^6}\,dx=\frac{2\pi}{3}.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{e}.$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^4}\,dx=-\pi\mathrm{Re}(a^2e^{ia}),\quad$ όπου $a=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}.$

Υπόδειξη. (i) Για τα πολυώνυμα $P(x)=x^4$ και $Q(x)=1+x^6$ έχουμε $Q(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\deg(Q)-\deg(P)=2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{z^4}{1+z^6}$. Αφού $-1=e^{i\pi}$, οι ρίζες της $1+z^6=0$ είναι οι
$$a=e^{\pi i/6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2},-a=-\frac{\sqrt{3}+i}{2},i$$
και οι συζυγείς τους
$$\overline{a}=\frac{\sqrt{3}-i}{2},-\overline{a}=-\frac{\sqrt{3}-i}{2},-i.$$

Από αυτές, θετικό φανταστικό μέρος έχουν οι $a, -\overline{a}$ και i. Γνωρίζουμε ότι

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-\overline{a}) + \mathrm{Res}(f,i)).$$

Αν $\rho \in \{a, -\overline{a}, i\}$ τότε

$$\mathrm{Res}(f,\rho) = \frac{z^4}{6z^5}\Big|_{z=\rho} = \frac{1}{6}\frac{1}{\rho} = \frac{\overline{\rho}}{6}.$$

Επομένως,

$$I = \frac{2\pi i}{6}(\overline{a} + \overline{-\overline{a}} + \overline{i}) = \frac{\pi i}{3}(\overline{a} - a - i) = \frac{\pi i}{3}(-i)(2\mathrm{Im}(a) + 1) = \frac{\pi}{3}\left(2\cdot\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $\pm i$, από τα οποία μόνο το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,i).$$

Το i είναι πόλος τάξης 2 για την f, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i}((z-i)^2 f(z))' = \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)'\Big|_{z=i} \\
&= \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} = \frac{ie^{-1}(2i)^2 - 2e^{-1}(2i)}{(2i)^4} \\
&= \frac{-8ie^{-1}}{16} = \frac{-i}{2e}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}.$$

Τώρα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{e}.$$

(iii) Θεωρούμε την $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+1}$ και παρατηρούμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 1 = 0$ είναι οι $\pm a$ και $\pm\overline{a}$, όπου $a = e^{i\pi/4} = (1+i)\sqrt{2}$. Από αυτές, μόνο οι a και $-\overline{a}$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Γνωρίζουμε ότι

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+1}e^{ix}\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-\overline{a})).$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\mathrm{Res}(f,b) = \frac{be^{ib}}{4b^3} \quad \text{όπου } b = a \text{ ή } -\overline{a}.$$

Συνεπώς,

$$I = \frac{\pi i}{2}(a^{-2}e^{ia} + \overline{a}^{-2}e^{-i\overline{a}}) = \frac{\pi i}{2}(a^{-2}e^{ia} + \overline{a^{-2}e^{ia}}) = \pi i\mathrm{Re}(a^{-2}e^{ia}) = -\pi i\mathrm{Re}(a^2e^{ia})$$

διότι $a^{-2} = -a^2$. Έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+16}\sin x\,dx = \mathrm{Im}(I) = -\pi\mathrm{Re}(a^2e^{ia}).$$

4.42. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\,dt = \pi\left(a - \sqrt{a^2-1}\right), \quad a > 1.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\,dt$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = 2\pi - t$ παρατηρούμε ότι

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\,dt = -\int_\pi^0 \frac{\sin^2 x}{a+\cos(2\pi - x)}dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{a+\cos x}dx = I.$$

Επομένως,

$$J := \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}dt = \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}dt = 2I.$$

Αν $z = e^{it}$ τότε $\sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$ και $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$.Αν λοιπόν θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ τότε

$$J = \int_\gamma \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{a + \frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{i}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^2}{4az^3 + 2z^2(z^2+1)}\,dz = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2az+1)}\,dz.$$

Θέτουμε

$$f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{4az^3 + 2z^2(z^2+1)}.$$

Οι ρίζες της $z^2 + 2az + 1 = 0$ είναι οι $\rho_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$ και $\rho_2 = 1/\rho_1$. Έχουμε $|\rho_1| = a - \sqrt{a^2-1} < 1 < |\rho_2|$, άρα $\rho_1 \in \operatorname{int}(\gamma^*)$ και $\rho_2 \notin \operatorname{int}(\gamma^*)$. Συνεπώς,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,\rho_1)).$$

Για τον υπολογισμό του $\operatorname{Res}(f,0)$ παρατηρούμε ότι $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\cdot\frac{1}{z^2}$, όπου $\varphi(z) = (z^2-1)^2$ και $\psi(z) = z^2+2az+1$. Ελέγχουμε ότι $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ και $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 2a$, άρα

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \frac{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}{(\psi(0))^2} = -2a.$$

Για τον υπολογισμό του $\operatorname{Res}(f,\rho_1)$ γράφουμε $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ όπου $\varphi(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2$, άρα

$$\operatorname{Res}(f,\rho_1) = \frac{\varphi(\rho_1)}{\psi'(\rho_1)}.$$

Υπολογίζουμε τις τιμές

$$\varphi(\rho_1) = \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}\right)^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 = (\rho_1+\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2 = (-2a)^2 - 4\cdot 1 = 4(a^2-1)$$

και

$$\psi'(\rho_1) = 2\rho_1 + 2a = 2(\rho_1 + a) = 2\sqrt{a^2-1}.$$

Συνεπώς,

$$\operatorname{Res}(f,\rho_1) = \frac{4(a^2-1)}{2\sqrt{a^2-1}} = 2\sqrt{a^2-1}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(-2a + 2\sqrt{a^2-1}) = 4\pi i(-a + \sqrt{a^2-1}),$$

και τελικά
$$J = \frac{i}{2}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi(a - \sqrt{a^2-1}),$$
απ' όπου παίρνουμε ότι
$$I = \frac{1}{2}J = \pi(a - \sqrt{a^2-1}).$$

4.43. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να δείξετε ότι
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Αν $z = e^{it}$ τότε $dt = \frac{1}{iz}\,dz$ και $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} &= \int_\gamma \frac{1}{\left(2 + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{1}{iz}\,dz \\ &= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{4z^2}{(z^2+4z+1)^2}\frac{1}{z}\,dz = \frac{4}{i}\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz.\end{aligned}$$
Οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 4z + 1$ είναι οι
$$a = -2 + \sqrt{3} \quad \text{και} \quad b = -2 - \sqrt{3}.$$
Έχουμε $|a| < 1 < |b|$, άρα
$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}, a\right).$$
Υπολογίζουμε το
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z-a)^2(z-b)^2}, a\right) &= \left(\frac{(z-a)^2 z}{(z-a)^2(z-b)^2}\right)'\Big|_{z=a} = \frac{(z-b)^2 - 2z(z-b)}{(z-b)^4}\Big|_{z=a} \\ &= -\frac{a+b}{(a-b)^3} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}},\end{aligned}$$
άρα, τελικά,
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4.44. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να δείξετε ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\cos x}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{e} - 2\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right),$$
όπου $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. [Παρατηρήστε ότι $a^6 = i^6 = -1$.]

Υπόδειξη. Το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το
$$\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)$$
όπου
$$f(z) = \frac{z^4}{z^6+1}e^{iz}.$$
Επειδή $\deg(z^6+1) - \deg(z^4) = 2 > 1$ και $z^6 + 1 \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$, για τον υπολογισμό του $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

χρειαζόμαστε μόνο τις ρίζες της εξίσωσης $z^6 + 1$ με θετικό πραγματικό μέρος. Οι έξι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\pm i, \pm a, \pm\overline{a}$, και από αυτές θετικό πραγματικό μέρος έχουν οι i, a και $-\overline{a}$. Με τη γνωστή μέθοδο παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-\overline{a})).$$

Αν $\xi \in \{i, a, -\overline{a}\}$ τότε

$$\mathrm{Res}(f,\xi) = \frac{z^4 e^{iz}}{(z^6+1)'}\bigg|_{z=\xi} = \frac{e^{i\xi}}{6\xi} = \frac{\overline{\xi}e^{i\xi}}{6}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \frac{2\pi i}{6}\left(\overline{i}e^{-1} + \overline{a}e^{ia} - ae^{-i\overline{a}}\right)\\ &= \frac{\pi i}{3}\left(-\frac{i}{e} + \overline{a}e^{ia} - \overline{\overline{a}e^{ia}}\right)\\ &= \frac{\pi i}{3}\left(-\frac{i}{e} + 2i\,\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right)\\ &= \frac{\pi i}{3}(-i)\left(\frac{1}{e} - 2\,\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{e} - 2\,\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right).\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\cos x}{1+x^6}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{e} - 2\,\mathrm{Im}(\overline{a}e^{ia})\right).$$

4.45. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}\,dt.$$

Υπόδειξη. Αφού $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ και $dt = \frac{1}{iz}dz$ για $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}\,dt &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{5}+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{1}{iz}\,dz\\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2\sqrt{5}z+1}\,dz\\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z+\sqrt{5}-2)(z+\sqrt{5}+2)}\,dz.\end{aligned}$$

Τα σημεία $-\sqrt{5}\pm 2$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{1}{(z+\sqrt{5}-2)(z+\sqrt{5}+2)}$ και μόνο το σημείο $-\sqrt{5}+2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}\,dt &= \frac{2}{i}2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,-\sqrt{5}+2)\\ &= 4\pi\lim_{z\to-\sqrt{5}+2}(z+\sqrt{5}-2)\frac{1}{(z+\sqrt{5}-2)(z+\sqrt{5}+2)} = 4\pi\cdot\frac{1}{4} = \pi.\end{aligned}$$

4.46. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{3\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = 3\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{5-4\cos\theta}\,d\theta\right) = \pi.$$

Υπόδειξη. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. φού $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ και

$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{z}{iz(5 - 2(z + z^{-1}))}\, dz = i \int_{|z|=1} \frac{z}{2z^2 - 5z + 2}\, dz$$
$$= i \int_{|z|=1} \frac{z}{(2z-1)(z-2)}\, dz.$$

Τα σημεία 1/2 και 2 είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{z}{(2z-1)(z-2)}$. Από αυτά τα δύο σημεία, μόνο το 1/2 βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{3\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta &= 3\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta\right)\\
&= -6\pi\,\mathrm{Re}\left[2\pi i \cdot i\mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2 - 5z + 2}, \frac{1}{2}\right)\right]\\
&= -6\pi\,\mathrm{Re}\left[\frac{z}{(2z^2 - 5z + 2)'}\Big|_{z=1/2}\right]\\
&= -6\pi\,\mathrm{Re}\left[\frac{z}{4z - 5}\Big|_{z=1/2}\right]\\
&= -6\pi\,\mathrm{Re}(-1/6) = \pi.\end{aligned}$$

4.47. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $P(z) - z^2$ και $Q(z) = z^4 + 4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε, για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > \sqrt{2}$, ισχύει ότι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|^2}$$

για κάθε $|z| \geqslant R_0$. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0.$$

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $R_0 \geqslant 1$ τέτοιος ώστε αν $|z| \geqslant R_0$ να ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}|z|^4 \leqslant |Q(z)| \leqslant \frac{3}{2}|z|^4.$$

Έχουμε $Q(z) = z^4 + 4 = 0$ αν και μόνο αν $z^4 = 4e^{\pi i}$, άρα οι ρίζες του πολυωνύμου Q είναι οι

$$z_k = \sqrt{2}e^{(2k\pi+\pi)i/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Δηλαδή, $z_k = \pm 1 \pm i$. Θεωρούμε $R_0 > \sqrt{2}$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R_0$ να περιέχει στο εσωτερικό του τις ρίζες $\pm 1 \pm i$ του Q. Τότε, για κάθε $|z| \geqslant R_0$ έχουμε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{\frac{1}{2}|z|^4} = \frac{2}{|z|^2}.$$

Τώρα, αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| &\leqslant \int_{\gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |dz| \leqslant \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^2}\, |dz|\\
&= \frac{2}{R^2} \cdot \pi R = \frac{2\pi}{R} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

όταν $R \to +\infty$, άρα

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+4}.$$

Η f έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\pm1\pm i$, και από αυτά τα $\pm1+i$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε την f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R,R]\cup\gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$ και $R > \sqrt{2}$. Η f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από τα σημεία $\pm1+i$ που είναι απλοί πόλοι της f. Υπολογίζουμε τα

$$\mathrm{Res}(f,\pm1+i) = \frac{z}{(z^2+4)'}\Big|_{z=\pm1+i} = \frac{1}{4(\pm1+i)}.$$

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i(\mathrm{Res}(f,1+i) + \mathrm{Res}(f,-1+i))\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{4(1+i)} + \frac{1}{4(-1+i)}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Όμως,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0.$$

Επομένως, αφήνοντας το $R\to+\infty$ στην προηγούμενη ισότητα, βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

4.48. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και το λήμμα Jordan, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^2+2x+2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx\right) = -\pi e^{-\pi}.$$

Υπόδειξη. Από το λήμμα Jordan γνωρίζουμε ότι αν P,Q είναι πολυώνυμα και $\deg(Q)\geqslant\deg(P)+1$ τότε

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}\,dz = 0$$

για κάθε $\lambda>0$, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^2+2z+2}.$$

Τα $-1\pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και το $-1+i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε την f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma=[-R,R]\cup\gamma_R$, με θετική φορά, όπου $R>|-1+i| = \sqrt{2}$. Η f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ κτός από το σημείο $z=-1+i$ που είναι απλός πόλος της f. Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z)e^{i\pi z}, -1+i) &= \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i))\frac{1}{(z-(-1+i))(z+1+i)}e^{i\pi z}\\ &= \frac{e^{i\pi(-1+i)}}{2i} = e^{-i\pi}\frac{e^{-\pi}}{2i} = -\frac{e^{-\pi}}{2i}.\end{aligned}$$

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\pi x}\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f(z)e^{i\pi z}, -1+i) = -\pi e^{-\pi}.$$

Από το λήμμα Jordan έχουμε ότι

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\,dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^2+2z+2}\,dz = 0.$$

Αφήνοντας το $R \to +\infty$ στην προηγούμενη ισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\,dx\right) = -\pi e^{-\pi}.$$

4.49. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $\pm i$, $\pm 2i$. Από αυτά, μόνο τα i και $2i$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\cdot(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,2i)).$$

Τα $i, 2i$ είναι απλοί πόλοι της f, με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\operatorname{Res}(f,i) = \left.\frac{e^{iz}/(z^2+4)}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{1}{6ei}$$

και

$$\operatorname{Res}(f,2i) = \left.\frac{e^{iz}/(z^2+1)}{(z^2+4)'}\right|_{z=2i} = -\frac{1}{12e^2 i}.$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{6ei}-\frac{1}{12e^2 i}\right) = \pi\left(\frac{1}{3e}-\frac{1}{6e^2}\right).$$

Τώρα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right) = \pi\left(\frac{1}{3e}-\frac{1}{6e^2}\right).$$

4.50. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $\pm i$, από τα οποία μόνο το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i).$$

Το i είναι πόλος τάξης 2 για την f, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i} ((z-i)^2 f(z))' = \left(\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}\right)'\Big|_{z=i} \\
&= \frac{(e^{iz}+ize^{iz})(z+i)^2 - 2ze^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} = \frac{(e^{-1}-e^{-1})(2i)^2 - 4i^2e^{-1}}{(2i)^4} \\
&= \frac{4e^{-1}}{16} = \frac{1}{4e}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}.$$

Τώρα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\, dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

4.51. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+16}\, dx \quad \text{και} \quad \int_{\gamma} \frac{(e^z-1)^2}{z^3 \sin z}\, dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. [Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρήστε ότι $(e^{i\pi/4})^4 = -1$.]

Υπόδειξη. Για το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρούμε την $f(z) = \frac{z^3e^{iz}}{z^4+16}$ και παρατηρούμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4+16=0$ είναι οι $\pm\xi$ και $\pm\overline{\xi}$, όπου $\xi = 2e^{i\pi/4} = (1+i)\sqrt{2}$. Από αυτές, μόνο οι ξ και $-\overline{\xi}$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Κατά τα γνωστά, βλέπουμε ότι

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{x^4+16} e^{ix}\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,\xi) + \mathrm{Res}(f, -\overline{\xi})).$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{a^3e^{ia}}{4a^3} \quad \text{όπου } a = \xi \text{ ή } -\overline{\xi}.$$

Συνεπώς,

$$I = \frac{\pi i}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\overline{\xi}}) = \frac{\pi i}{2}(e^{i\xi} + \overline{e^{i\xi}}) = \pi i \mathrm{Re}(e^{i\xi}).$$

Όμως, $i\xi = \sqrt{2}(-1+i)$, άρα $e^{i\xi} = e^{-\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{2}) + i\sin(\sqrt{2}))$ οπότε, τελικά,

$$I = \pi i e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}).$$

Έπεται ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{x^4+16} \sin x \, dx = \mathrm{Im}(I) = \pi e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}).$$
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θεωρούμε την $g(z) = \frac{(e^z-1)^2}{z^3 \sin z}$ και παρατηρούμε ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g είναι οι $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ αλλά μόνο το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, άρα
$$\int_\gamma g(z) \, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g, 0).$$
Γράφουμε
$$g(z) = \frac{(z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots)^2}{z^3(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)} = \frac{1}{z^2} \frac{\varphi(z)^2}{\psi(z)},$$
όπου $\varphi(z) = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$ με $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1/2$ και $\psi(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$, με $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$.

Αφού $\psi(0) \neq 0$, η φ^2/ψ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή U του 0, άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 για την g, και
$$\mathrm{Res}(g, 0) = \lim_{z\to 0} (z^2 g(z))' = \left(\frac{\varphi(z)^2}{\psi(z)} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{2\varphi(0)\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)^2\psi'(0)}{[\psi(0)]^3} = 1.$$
Έπεται ότι
$$\int_\gamma g(z) \, dz = 2\pi i.$$

4.52. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
$$\int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{z^2(1 - \cos z)} \, dz \quad \text{και} \quad \int_\gamma \frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} \, dz,$$
όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το 0 είναι το μοναδικό μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z) = \frac{e^z-1-z}{z^2(1-\cos z)}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, άρα
$$\int_\gamma f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, 0).$$
Γράφουμε
$$e^z - 1 - z = z^2 \varphi(z), \quad \text{όπου} \quad \varphi(z) = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$
και παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ και $\varphi'(0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. Επίσης,
$$z^2(1 - \cos z) = z^4 \psi(z), \quad \text{όπου} \quad \psi(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots$$
και παρατηρούμε ότι $\psi(0) = \frac{1}{2}$ και $\psi'(0) = 0$. Οι φ, ψ είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και αφού $\psi(0) \neq 0$ βλέπουμε ότι η φ/ψ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή U του 0. Έχουμε ότι, για κάθε $z \in U$,
$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$
άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 για την f και
$$\mathrm{Res}(f, 0) = \left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}{[\psi(0)]^2} = \frac{\varphi'(0)}{\psi(0)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Έπεται ότι
$$\int_\gamma f(z), dz = \frac{2\pi i}{3}.$$
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι τα 0 και 1 είναι τα μοναδικά μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}$ που βρίσκονται στο εσωτερικό της γ, άρα
$$\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,1)).$$
Γράφουμε
$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \cdots$$
και
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \cdots$$
για $0 < |z| < 1$. Ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ στο ανάπτυγμα της g είναι ίσος με
$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = \sin(1),$$
άρα $\mathrm{Res}(g,0) = \sin(1)$. Υπολογίζουμε επίσης το
$$\mathrm{Res}(g,1) = \frac{\sin(1/z)}{(1-z)'}\Big|_{z=1} = -\sin(1).$$
Έπεται ότι
$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0.$$

4.53. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^3\sin z}\,dz \quad \text{και} \quad \int_\gamma \frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}\,dz,$$
όπου $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Υπόδειξη. Για το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρούμε την $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3\sin z}$ και παρατηρούμε ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι οι $k\pi$, $k]in\mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ, άρα
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0).$$
Γράφουμε
$$f(z) = \frac{(z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots)}{z^3(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)} = \frac{1}{z^3}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$
όπου $\varphi(z) = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$ με $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1/2$, $\varphi''(0) = 1/3$ και $\psi(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$, με $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = -1/3$.

Αφού $\psi(0) \neq 0$, η φ/ψ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή U του 0, άρα το 0 είναι πόλος τάξης 3 για την g, και
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(g,0) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(z^3 f(z))'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)''\Big|_{z=0}\\ &= \frac{1}{2}\frac{(\varphi''\psi - \varphi\psi'')\psi^2 - 2\psi\psi'(\varphi'\psi - \varphi\psi')}{\psi^4}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}(\varphi''(0) - \psi''(0)) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{3}.$$
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι τα 0 και 1 είναι τα μοναδικά μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}$ που βρίσκονται στο εσωτερικό της γ, άρα
$$\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,1)).$$
Γράφουμε
$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \cdots$$
και
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \cdots$$
για $0 < |z| < 1$. Ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ στο ανάπτυγμα της g είναι ίσος με
$$-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = \cos(1) - 1,$$
άρα $\mathrm{Res}(g,0) = \cos(1) - 1$. Υπολογίζουμε επίσης το
$$\mathrm{Res}(g,1) = \frac{\cos(1/z)}{(1-z)'}\Big|_{z=1} = -\cos(1).$$
Έπεται ότι
$$\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i\cdot(\cos(1) - 1 - \cos(1)) = -2\pi i.$$