Μιγαδική Ανάλυση – Ασκήσεις

Α. Μιγαδικοί αριθμοί και μιγαδικές συναρτήσεις

Α1. Υπολογίστε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους τύπους του αντιστρόφου και της διαίρεσης:
$$z_1 = \frac{1}{3+4i}, \quad z_2 = \frac{2-3i}{-3+5i}.$$

Α2. Υπολογίστε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς:
$$z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}, \quad z_2 = \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}.$$

Α3. Αποδείξτε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και κάθε $n = 1, 2, \dots$ ισχύουν οι
$$\text{(i)}\ |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \text{(ii)}\ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}, \quad \text{(iii)}\ \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \text{(iv)}\ (\overline{z})^n = \overline{z^n}.$$

Α4. Αν το p είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του p τότε και ο συζυγής $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα του p.

Α5. Ποιές είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|z| = z$; Ποιες είναι οι λύσεις της $|z| = iz$;

Α6. Λύστε την εξίσωση $z^2+z+1 = 0$, ανάγοντάς την σε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο πραγματικούς αγνώστους.

Α7. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, αποδείξτε ότι $|\mathrm{Im}(1 - \overline{z} + z^2)| < 2$.

Α8. Ποια είναι η μέγιστη τιμή και ποια η ελάχιστη τιμή του $|z^4 - 4z^2 + 3|$ όταν $|z| = 2$; Όταν $|z| \leqslant 2$;

Α9. Αποδείξτε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z \pm w|^2 \leqslant (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.

Α10. (α) Αποδείξτε ότι $|z - w| = |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι $|z - w| < |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|, |w| < 1$ ή $|z|, |w| > 1$.

Α11. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα:
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - i| < 1\} \quad \text{και} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0, |z - i| > 1\}.$$

Α12. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα των z που ικανοποιούν καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:
$$z + \overline{z} = 1, \quad i(z - \overline{z}) \leqslant 2, \quad 2i(\overline{z} - z) + |z|^2 + 1 \leqslant 0$$
και
$$(2 - i)z + (2 + i)\overline{z} = -2, \quad \mathrm{Re}((1 - i)z) \geqslant 1, \quad |z| + \mathrm{Re}(z) \leqslant 1.$$

Α13. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι:

(α) $|z| = 1$ αν και μόνο αν $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

(β) Αν $z \neq -1$ και $|z| = 1$ τότε $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{I}$.

Α14. Αποδείξτε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$
και δώστε τη γεωμετρική σημασία αυτής της ισότητας.

Α15. Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ και $|z + w| = |z| = |w|$ να αποδείξετε ότι $|z - w| = \sqrt{3}|z|$.

Α16. Αν $|z - 1| \leqslant 1$ και $|z - 2| = 1$ να αποδείξετε ότι $1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{3}$.

Α17. Να περιγράψετε τους γεωμετρικούς τόπους:

(α) $|z - 3 + 4i| = |z - 1|$.

(β) $|z - i| \leqslant 1$.

(γ) $\mathrm{Re}(\overline{z} + i) \leqslant 2$.

(δ) $|z-2| = 2|z+1|$.

(ε) $|1-z| + |i+z| = 4$.

(στ) $|z-2+i| - |z+1| = 10$.

A18. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί ανά δύο και οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι
$$\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

A19. Να λύσετε τις εξισώσεις
$$(z+1)^2 + (z-1)^2 = 0 \quad \text{και} \quad z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

A20. (α) Αν $z \in \mathbb{C}$ και $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$, όπου $\mathbb{I}$ είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

(β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{I}$.

A21. Περιγράψτε το χωρίο $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > |z-1|\}$.

A22. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$. Αποδείξτε ότι η καμπύλη $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = a|z - z_2|\}$ είναι ο κύκλος $|z - z_0| = R$ με κέντρο $z_0 = \frac{z_1 - a^2 z_2}{1 - a^2}$ και ακτίνα $R = \frac{a}{|1-a^2|}|z_1 - z_2|$.

A23. Βρείτε τα ορίσματα και το πρωτεύον όρισμα καθενός από τους
$$\pm(\sqrt{3} \pm i), \quad \pm(1 \pm i\sqrt{3}), \quad \pm(1 \pm i).$$

A24. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σημεία z για τα οποία: (α) $\arg(z^2) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (β) $\arg(z^3) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (γ) $\arg(z^4) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A25. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\vartheta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι
$$\left(\frac{1 + i\tan\vartheta}{1 - i\tan\vartheta}\right)^n = \frac{1 + i\tan n\vartheta}{1 - i\tan n\vartheta}.$$

A26. Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική ταυτότητα $z^{n+1} - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$ να βρείτε τύπους για τα αθροίσματα
$$1 + r\cos\vartheta + r^2\cos(2\vartheta) + \cdots + r^n\cos(n\vartheta) \quad \text{και} \quad r\sin\vartheta + r^2\sin(2\vartheta) + \cdots + r^n\sin(n\vartheta),$$
όπου $r \geqslant 0$.

A27. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

A28. Αποδείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z^n) \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $z \in \mathbb{R}$ και $z \geqslant 0$.

A29. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς
$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6, \quad w_2 = \frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^6}, \qquad w_3 = (-1+i)^7$$

A30. Υπολογίστε τις δυνάμεις $(1+i)^{15}$, $(1+i)^{20}$ και $(1-i)^{13}$.

A31. Έστω $z = 1 + i$. Υπολογίστε τον μιγαδικό αριθμό z^8 καθώς και το μέτρο και το κύριο όρισμα του μιγαδικού αριθμού z^{2019}.

A32. Υπολογίστε τις ρίζες $(-1)^{1/2}$, $(-1)^{1/3}$, $(-1)^{1/4}$, $i^{1/2}$, $i^{1/3}$, $i^{1/4}$.

A33. Αν $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $z^3 - 1 = 0$.

(β) $z^2 + z + 1 = 0$.

(γ) $z^{2019} = 1$.

(δ) $(1+z)^{2n} = z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

A34. Έστω $n \geqslant 2$ και $z_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας. Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(β) $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0$.

(γ) $z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

(δ) $(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) = z^n - 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(ε) $(1 - z_1) \cdots (1 - z_{n-1}) = n$.

(στ) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k^s = 0$ για κάθε $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Α35. Να λύσετε την εξίσωση $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$.

Α36. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού αριθμού $3 + i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6 = -64$.

Α37. Να λύσετε τις εξισώσεις $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$, $z^2 = \sqrt{3} + 3i$ και $z^3 + i = 0$.

Α38. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης $z^{n-1} = \overline{z}$.

Α39. Δείξτε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = (1 - z)^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι οι

$$z_k = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Α40. Να λύσετε τις εξισώσεις $e^z = e^{1+i}$, $e^z = 1 + i$ και $e^z = -1 + i\sqrt{3}$.

Α41. Να λύσετε την εξίσωση $\cos z = \frac{1}{2}$. Τι παρατηρείτε;

Α42. Να αποδείξετε ότι για κάθε $w \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos z = w$ έχει λύση. Τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση $\cos z$;

Α43. Να βρείτε όλες τις λύσεις των εξισώσεων

$$\cosh z = \frac{1}{2}, \quad \sinh z = i, \quad \cosh z = -2.$$

Α44. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς i^π, π^i, $\mathrm{Log}(-1)$ και $\mathrm{Log}(i)$.

Α45. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς:

$$w_1 = \mathrm{Log}(-1 + i), \quad w_2 = \mathrm{Log}(3 + \sqrt{3}i).$$

Α46. Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα

$$\mathrm{Log}((1 + i)^2) = 2\mathrm{Log}(1 + i)$$

αλλά

$$\mathrm{Log}((-1 + i)^2) \neq 2\mathrm{Log}(-1 + i).$$

Α47. Δείξτε ότι το σύνολο των τιμών του $\log(i^{1/2})$ είναι το $\left\{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i : n \in \mathbb{Z}\right\}$ και το ίδιο ισχύει για τον $\frac{1}{2}\log i$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των τιμών του $\log(i^2)$ δεν συμπίπτει με το σύνολο των τιμών του $2\log\, i$.

Α48. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες: για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z, \quad \sinh(2z) = 2\sinh\, z \cdot \cosh\, z.$$

Α49. Αποδείξτε ότι για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leqslant |\sin z|, \quad |\cos x| \leqslant |\cos z|, \quad |\sinh y| \leqslant |\sin z| \leqslant \cosh y, \quad |\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y.$$

Α50. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία

$$\arg[z - (1 + 2i)] = -\frac{\pi}{3}.$$

Α51. Περιγράψτε τα πιο κάτω σύνολα:

$$\text{(i)} \ \ |\arg z| < \pi/4, \quad \text{(i)} \ \ 0 < \arg(z - 1 - i) < \pi/3, \quad \text{(iii)} \ \ |z| = \arg z, \quad \text{(iv)} \ \ \log|z| = -2\arg z.$$

Α52. Αν $f(z) = z + 1 + z\mathrm{Log}z$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$.

A53. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια

$$\lim_{z\to 0} \mathrm{Log} z, \qquad \lim_{z\to 0} e^{z}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|}.$$

A54. Να βρείτε την εικόνα του κύκλου $|z| = 1$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

A55. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$w = f(z) = \frac{i+z}{i-z}, \quad z \in \mathbb{C},\ z \neq i.$$

Αποδείξτε ότι η $w = f(z)$ απεικονίζει το τυχόν σημείο z του μοναδιαίου κύκλου $C(0,1)$ στον φανταστικό άξονα $\mathrm{Re} w = 0$.

A56. Περιγράψτε την εικόνα καθεμιάς από τις πιο κάτω καμπύλες μέσω της απεικόνισης $w = z^2$:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ \ |z-1| = 1, \quad \text{(ii)}\ \ y = 1, \quad \text{(iii)}\ \ y^2 = x^2 - 1,\ x > 0,\\ &\text{(iv)}\ \ x = 1, \quad \text{(v)}\ \ y = x + 1, \quad \text{(vi)}\ \ y = 1/x,\ x \neq 0.\end{aligned}$$

A57. Περιγράψτε την εικόνα καθενός από τα πιο κάτω χωρία μέσω της απεικόνισης $w = e^{z}$:

(i) της κατακόρυφης λωρίδας $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$.

(ii) της οριζόντιας λωρίδας $5\pi/3 < \mathrm{Im}(z) < 8\pi/3$.

(iii) του ορθογωνίου $0 < x < 1$, $0 < y < \pi/4$.

(iv) του δίσκου $|z| \leqslant \pi/2$.

(v) του δίσκου $|z| \leqslant \pi$.

(vi) του δίσκου $|z| \leqslant 3\pi/2$.

A58. Περιγράψτε την εικόνα καθενός από τα πιο κάτω χωρία μέσω της απεικόνισης $w = \mathrm{Log}\, z$:

(i) του δεξιού ημιεπιπέδου $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(ii) του ημι-δίσκου $|z| < 1$, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(iii) του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$.

(iv) του δακτυλίου με σχισμή $\sqrt{e} < |z| < e^2$, $z \notin (-e^2, -\sqrt{e})$.

(v) της οριζόντιας ευθείας $y = e$.

(vi) της κατακόρυφης ευθείας $x = e$.

A59. Θεωρούμε τη λωρίδα

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο. Να βρεθεί η εικόνα του συνόρου της λωρίδας Ω_1, καθώς επίσης και του ευθύγραμμου τμήματος $x = x_0$, $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, μέσω του μετασχηματισμού $w = e^{z}$. Ποια είναι η εικόνα της λωρίδας Ω_1 μέσω του μετασχηματισμού $w = e^{z}$;

Μελετήστε τα αντίστοιχα ερωτήματα για τη λωρίδα

$$\Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \pi \}$$

στο μιγαδικό επίπεδο.

A60. Θεωρούμε το χωρίο

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \right\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο. Να βρεθεί η εικόνα του Ω μέσω του μετασχηματισμού

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$