Μιγαδική Ανάλυση – Ασκήσεις

Γ. Μιγαδική ολοκλήρωση – Θεώρημα Cauchy και συνέπειές του

Γ1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης:

(i) $\displaystyle\int_\gamma (3z^2 - 2z)\,dz, \quad \gamma(t) = t + it^2, \;\; t \in [0,1].$

(ii) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Im}(z - i)\,dz, \quad \Gamma = \gamma + [i, -1], \;\; \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \pi/2].$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \cos z\,dz, \quad \gamma = \left[-\frac{\pi}{2} + i, \pi + i\right].$

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{Log} z}{z}\,dz, \quad \gamma = [1, i].$

(v) $\displaystyle\int_\gamma |z+1|^2\,dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, 2\pi].$

(vi) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z^2 e^z}\,dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, \pi].$

Γ2. Αποδείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz\right| \leqslant \pi, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it},\, t \in [0, \pi]$$

και

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2 + \overline{z} + 1}\right| \leqslant \frac{3\pi}{10}, \quad \text{όπου } \gamma(t) = 3e^{it},\, t \in [0, \pi/2].$$

Γ3. Να δείξετε ότι $|\sin(z^2)| \leqslant e$ για $|z| = 1$ και ότι

$$\left|\int_\gamma e^{2\overline{z}} \sin(z^2)\,dz\right| \leqslant 2\pi e^3, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it},\, t \in [0, 2\pi].$$

Γ4. Αποδείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{2+z^2}\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

όπου γ είναι το τόξο του κύκλου $|z| = 2$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Γ5. Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma z\cos(\pi i z)\,dz = \frac{2}{\pi^2},$$

όπου γ είναι η καμπύλη με εξίσωση $\gamma(t) = t - t^2 + it^3$, $t \in [0,1]$.

Γ6. Θεωρούμε την έλλειψη γ που δίνεται από την $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$

αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Γ7. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz^2}}{1+z^2}\,dz=0,$$
όπου $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi/2]$, $R>0$.

Γ8. Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(z_1)\leqslant 0$ και $\mathrm{Re}(z_2)\leqslant 0$. Αποδείξτε ότι
$$|e^{z_1}-e^{z_2}|\leqslant|z_1-z_2|.$$

Γ9. Έστω $z_0\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Im}(z_0)<0$. Έστω επίσης $R>0$ και γ_R το ημικύκλιο με $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[\pi,2\pi]$.

(α) Να δείξετε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z(z-z_0)}=0\quad\text{και}\quad\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z-z_0}=\pi i.$$

(β) Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dt}{t-z_0}.$$

Γ10. Αποδείξτε ότι
$$\int_{[-R,R]\cup\gamma_R}|z|\overline{z}\,dz=R^3\pi i,$$
όπου γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο το 0, ακτίνα $R>0$ και θετική φορά διαγραφής.

Γ11. Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f,g:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ απλή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^*\subset U$. Εάν $z_0=\gamma(a)$, $z_1=\gamma(b)$, να δείξετε ότι
$$\int_\gamma f'(z)g(z)\,dz=f(z_1)g(z_1)-f(z_0)g(z_0)-\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz.$$

Γ12. Δίνεται η καμπύλη $\gamma_r(t)=re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, όπου $r>0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_{\gamma_r}\mathrm{Re}(z)\,dz.$$
Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{Re}(z)$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.

Γ13. (α) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ και $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι
$$\frac{d}{dt}\big[\,|\varphi(t)|^2\,\big]=2\mathrm{Re}\big[\,\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\big]$$
για κάθε $t\in[a,b]$.

(β) Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και γ απλή, κλειστή, λεία καμπύλη με $\gamma^*\subset U$. Να δείξετε ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}\,dz$$
είναι φανταστικός αριθμός.

αφού $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Γ14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(α) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, $R > 0$.

(β) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

Γ15. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^2}\,dz,$$

όπου

(α) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

(β) $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

Γ16. Να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \frac{\pi}{3},$$

ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $1/z$ πάνω στην έλλειψη $\gamma(t) = 2\cos t + 3i\sin t$, $t \in [0,2\pi]$.

Γ17. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, $|z_0| < 1$ και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Να δείξετε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-|z_0|^2}\int_\gamma f(z)\frac{1-z\overline{z_0}}{z-z_0}\,dz$$

και

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-|z_0|^2}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\,dt.$$

Γ18. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

(α) Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\overline{f'(0)}.$$

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_\gamma \overline{z\cos z}\,dz.$$

Γ19. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D[0,R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$, $R > 0$. Εάν $f(z_0) = 0$ για κάποιο z_0 με $|z_0| < R$, να δείξετε ότι

$$|f(0)| \leqslant \frac{M_R|z_0|}{R-|z_0|},$$

όπου $M_R = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$.

Γ20. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geqslant 2$ με μεγιστοβάθμιο όρο $a_n z^n$.

(α) Να δείξετε ότι

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}-1\right|=0.$$

Συμπεράνατε ότι υπάρχει $R_0>0$ τέτοιος ώστε, για $|z|>R_0$,

$$|P(z)|>\frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$

(β) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{P(z)}\,dz=0,$$

όπου $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $R>0$.

(γ) Εάν γ είναι μια απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη που περικλείει όλες τις ρίζες του $P(z)$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma\frac{1}{P(z)}\,dz=0.$$

Γ21. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0, καθώς και την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης,όπου:

(α) $f(z)=1-\frac{2}{1+z}+\frac{1}{(1+z)^2}$, $z_0=i$.

(β) $f(z)=(\cos z)^2$, $z_0=\pi$.

Γ22. (α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f_1(z)=\frac{z^2+6z}{(2-z)(z+2)^2}=\frac{1}{2-z}-\frac{2}{(z+2)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_1 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0=0$, καθώς και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f_2(z)=\frac{1}{z^2+4z-3i}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_2 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0=-2$, καθώς και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Γ23. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z)=\frac{z}{2}(e^{z^2}-e^{-z^2})$ γύρω από το σημείο $z_0=0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(23)}(0)$.

Γ24. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z)=\frac{z^5}{1+z^4}$ γύρω από το σημείο $z_0=0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(21)}(0)$.

Γ25. Για $|z|<1$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$.

Γ26. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{z^{10}}{1+z^{20}}$. Να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(50)}(0)$ και $f^{(100)}(0)$.

Γ27. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$. Να δείξετε ότι η F είναι ολόμορφη στον δίσκο $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ και ότι $F(z)=\mathrm{Log}(1+z)$ για κάθε $z\in D$.

Γ28. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{z\to0}\frac{(1-\cos z)^2}{(e^z-1-z)\sin^2 z}\quad\text{και}\quad\lim_{z\to0}\frac{1-\cos(2z)}{(e^{2iz}-1)\sin z}.$$

Γ29. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(α) $f^{(n)}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Γ30. Αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, αποδείξτε ότι

$$\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \overline{f'(0)}$$

και

$$\int_{|z|=1} z \cdot \overline{f(z)}\, dz = \pi i \cdot \overline{f''(0)}.$$

Γ31. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(nz)| \leqslant n|f(z)| \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $f''(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και συμπεράνατε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1.

Γ32. Έστω f ακέραια συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy αποδείξτε ότι

$$\int_{C(0,4)} \frac{f(z)}{z^2 + z - 6}\, dz = \frac{2\pi i}{5}(f(2) - f(-3)),$$

όπου $C(0,4)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 4.

Γ33. Αν η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης γ είναι $z(\vartheta) + 1 = 2e^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 6\pi$, χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z - 4}{z^2(z-2)^3}\, dz = \frac{15}{8}.$$

Γ34. Έστω G τόπος που περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $g : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant 2$ α ισχύει

$$\int_{|z|=1} \frac{g(z)}{(nz-1)^{k+1}}\, dz = 0.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k - 1$ στο G.

Γ35. Να υπολογίσετε το ολοκληρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 1},$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $R > 1$.

Γ36. (α) Αν $\sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$, να δείξετε ότι

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

(β) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα Cauchy αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx.$$

Γ37. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ που ικανοποιεί την $|f(z)| \leqslant e^{-1/|z|}$ για κάθε $z \in D \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n! \frac{e^{-1/r}}{r^n}$$

για κάθε $r \in (0,1)$ και κάθε $n \geqslant 0$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D$.

Γ38. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz,$$

όπου η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z=-1$ και $z=1$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Γ39. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz,$$

όπου ο κύκλος C^+ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z=0$ και $z=\pi$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Γ40. Έστω

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot 3^n}.$$

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο το 0 στον οποίο η f είναι αναλυτική συνάρτηση. Να βρεθεί η $f(z)$ καθώς και η $f'(z)$.

Γ41. Έστω $0<r<R$. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}\, dt = 2\pi f'(0).$$

Γ42. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz, \qquad n \geqslant 0.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\vartheta} \cos(n\vartheta - \sin\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2\pi}{n!}.$$

Γ43. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \ \text{ για κάθε } \ z \in \mathbb{C}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|f(z)| \leqslant Me^{|z|}$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους αποδείξτε ότι για κάθε $r>0$ και κάθε $n\geqslant 0$ ισχύει

$$|a_n| \leqslant M\frac{e^r}{r^n},$$

και συμπεράνατε ότι

$$|a_n| \leqslant M\frac{e^n}{n^n} \ \text{ για κάθε } \ n \geqslant 0.$$

Γ44. Έστω $R>0$ και $\gamma = [-R,R]\cup\gamma_R$ κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη του επιπέδου, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο το 0 και ακτίνα R. Υποθέτουμε ότι το R είναι αρκετά μεγάλο ώστε το σημείο i να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ.

(α′) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz.$$

(β′) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{3\pi}{16}.$$

Γ45. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{ie^{-iz}-z^2}{z(z-i)^3}\,dz$$

όπου C ο κύκλος $|z-(1+2i)|=2$.

Γ46. Αποδείξτε ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3iz-1}\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Γ47. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant a|z|^2 + b$$

για κάθε $z\in\mathbb{C}$, όπου a,b θετικές σταθερές. Να δείξετε ότι:

(α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $R>0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\frac{aR^2+b}{R^n}.$$

(β) Υπάρχουν $A,B,C\in\mathbb{C}$ με $|A|\leqslant a$, $|C|\leqslant b$, ώστε

$$f(z) = Az^2+Bz+C, \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Γ48. (α) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $k\geqslant 0$ υπάρχουν σταθερές $A\geqslant 0$ και $B,R_0>0$ έτοιες ώστε $|f(z)|\leqslant A+B|z|^k$ για κάθε $|z|>R_0$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

(β) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Γ49. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $|f(z)|\leqslant |z|+2|z|^2$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι $f(z)=a_1z+a_2z^2$ για κάποιους $a_1,a_2\in\mathbb{C}$ με $|a_1|\leqslant 1$ και $|a_2|\leqslant 2$.

Γ50. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε $\mathrm{Im}f\geqslant 0$ στο $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Γ51. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $\mathrm{Re}(f(z))>0$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Γ52. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|g(z)|>\frac{1}{2}|z|$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

Γ53. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)|\geqslant 1$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Γ54. Έστω $f=u+iv$ ακέραια συνάρτηση με $u^2\leqslant v^2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Γ55. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση με

$$|f(z)|\leqslant Me^{a\mathrm{Re}(z)} \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C},$$

όπου a,M θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι

$$f(z)=ce^{az} \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C},$$

για κάποια σταθερά $c\in\mathbb{C}$.

Γ56. Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση με $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Έστω επίσης $z_0 \in G$ τέτοιο ώστε $f(z_0) \neq 0$. Αν $D(z_0, \delta) \subseteq G$ είναι μια περιοχή του z_0 μέσα στον G, αποδείξτε ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in D(z_0, \delta)$ τέτοια ώστε

$$|f(z_1)| > |f(z_0)| \quad \text{και} \quad |f(z_2)| < |f(z_0)|.$$

Γ57. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ώστε $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $|z| \leqslant 1$.

Γ58. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στον κύκλο $|z| = 1$. Αν $f(0) = -i$ και $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| = 1$, αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον $D(0,1)$.

Γ59. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$ για κάθε $z \in U$. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ για κάθε $z \in U$.

Γ60. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$ και $|f(z)| \leqslant M < \infty$ για κάθε $z \in D(0,R)$. Υποθέτουμε επίσης ότι το 0 είναι ρίζα τάξης 2 της f, δηλαδή $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R^2}|z|^2 \;\text{ για κάθε }\; z \in D(0,R)$$

και ότι

$$|f''(0)| \leqslant \frac{2M}{R^2}.$$

Γ61. Έστω f συνάρτηση αναλυτική στον δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και συνεχής στο σύνορο του Δ. Αν $|f(z)| \leqslant 1$ για κάθε $|z| = 1$ και $|f(z)| \leqslant 4$ για κάθε $|z| = 2$, αποδείξτε ότι $|f(1-i)| \leqslant 2$.

Γ62. Έστω $a \in \mathbb{C}$ με $|a| \leqslant 1$. Θέτουμε

$$P(z) = \frac{a}{2} + (1 - |a|^2)z - \frac{\overline{a}}{2}z^2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Να δείξετε ότι

$$\max_{|z|\leqslant 1} |P(z)| = \max_{|z|=1} \left|\frac{P(z)}{z}\right| \leqslant 1.$$

Γ63. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geqslant 1$.

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(z)$ βαθμού το πολύ n τέτοιο ώστε $P(z) = z^n Q(1/z)$ για κάθε $z \neq 0$.

(β) Αν $|P(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να δείξετε ότι $|P(z)| \leqslant |z|^n$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geqslant 1$.

Γ64. Έστω $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D}(0,1) \subseteq U$. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|} \qquad \text{για κάθε } z \text{ με } |z| = 1.$$

Αποδείξτε ότι $|1 - z^2|\,|f(z)| \leqslant 2$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,1)$.

Γ65. Να βρείτε τα

$$\max\{|f(z)| : z \in K\} \quad \text{και} \quad \min\{|f(z)| : z \in K\}$$

καθώς και τα σημεία στα οποία τα παραπάνω max και min λαμβάνονται, όπου:

(α) $f(z) = z^2 + 3z - 1$, $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.

(β) $f(z) = e^{z^2}$, K είναι το κλειστό και φραγμένο χωρίο που έχει σύνορο το τρίγωνο με κορυφές $0, -1, 1+i$.

Γ66. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = (1+y^2-x^2)^2 + 4x^2y^2$. Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = 1 - z^2$ στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ αποδείξτε ότι

$$\max_{x^2+y^2\leqslant 1} g(x,y) = g(0, \pm 1) = 4.$$

Γ67. Έστω $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ πολυώνυμο με $|p(z)| \leqslant 1$ για κάθε $|z| = 1$. Αποδείξτε ότι $p(z) \equiv z^n$.

Γ68. Έστω T το κλειστό τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα $-1, 0, 1+i$. Να βρείτε το $\max_{z\in T} |e^{z^2}|$ καθώς και τα σημεία του T στα οποία λαμβάνεται αυτό το μέγιστο.

Γ69. Θέτουμε $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και $\overline{D} = D \cup \partial D$. Θεωρούμε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D} \subseteq U$.

(α) Έστω $g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $|g(z)| = 1$ για κάθε $z \in \partial D$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Αποδείξτε ότι η g είναι σταθερή στο D.

(β) Έστω $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \partial D$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στον D.

Γ70. Έστω $r \in (0,1)$, $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D}(0,r) \subseteq U$. Θεωρούμε ολόμορφη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με $|f(z^2)| \geqslant |f(z)|$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. Αποδείξτε ότι

$$\max\{|f(z)| : |z| \leqslant r^2\} = \max\{|f(z^2)| : |z| \leqslant r\}$$

και ότι η f είναι σταθερή στον $\overline{D}(0,r)$.

Γ71. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένο χωρίο και $f, g : \overline{U} \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις, ολόμορφες στο U, τέτοιες ώστε $f\big|_{\partial U} = g\big|_{\partial U}$. Αποδείξτε ότι

$$f\big|_{\overline{U}} = g\big|_{\overline{U}}.$$

Γ72. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 3\},$$

τέτοια ώστε $|f(z)| \leqslant 1$ για $|z| = 1$ και $|f(z)| \leqslant 9$ για $|z| = 3$. Να δείξετε ότι $|f(z)| \leqslant |z|^2$ για κάθε $z \in \Delta$.

Γ73. Αποδείξτε ότι

$$\max_{|z|\leqslant 1} |(z-1)(2z+1)| = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Γ74. Έστω $f : D(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ μη σταθερή ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε $r \in (1,2)$,

$$\max\{|f(z)| : |z| = r\} \leqslant \frac{1}{r-1}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup\{|f(z)| : |z| < 2\} \leqslant 1 \quad \text{και} \quad |f(0)| < 1.$$

Γ75. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 3\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad |f(0)| \leqslant \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|.$$

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει ισότητα σε αυτήν την ανισότητα.

Γ76. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad |f(0)| \leqslant \frac{1}{15} \max_{|z|=2} |f(z)|.$$

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.