Μιγαδική Ανάλυση – Ασκήσεις

B. Μιγαδική παραγώγιση

B1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο.

B2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο.

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = f(x + iy) = \sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $(0, 0)$ αλλά δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

B4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = (3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos 2x) + i(3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin 2x + 3)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$. Στη συνέχεια εκφράστε την f ως συνάρτηση του z και υπολογίστε εκ νέου την παράγωγο $f'(z)$.

B5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = e^y \cos x + ie^y \sin x$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο $z \in \mathbb{C}$.

B6. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = 2x + y^2 + i(x^2 - y^2)$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος.

B7. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = x^3 + y + i(-x - y^3 + 3y)$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

B8. Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = (\overline{z} + 2i)^2 - 1$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

B9. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}e^{-|z|^2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

B10. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η $f(z) = \sin \overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Υπάρχει ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ στα σημεία του οποίου η f είναι παραγωγίσιμη;

B11. Έστω f συνεχής συνάρτηση στον τόπο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f^2 είναι ολόμορφη στο U και ότι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο U.

B12. Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, δείξτε ότι και η $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη.

B13. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ και $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0) και ότι το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

B14. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$ είναι αρμονικές στο ανοικτό $A \subseteq \mathbb{C}$. Ορίζουμε

$$U = u_x u_y + v_x v_y \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 - u_y^2 - v_y^2).$$

Αποδείξτε ότι η $F = U + iV$ είναι ολόμορφη στο A.

B15. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f = u + iv \in \mathcal{H}(A)$ με $u_x + v_y = 0$ στο A. Να δείξετε ότι υπάρχουν $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = icz + d, \quad z \in A.$$

B16. Έστω $f(z) = z^3$, $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1).$$

Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα μέσης τιμής δεν ισχύει για τις μιγαδικές συναρτήσεις.

B17. (α) Έστω x_0 αρνητικός πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{w \to x_0} \mathrm{Log}\, w$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

B18. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ και βρείτε ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(f) = u$ καθώς και τη συζυγή αρμονική v της u.

B19. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = ax^3y + 4xy^3 + x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u, καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = -i$. Να εκφράσετε την f ως συνάρτηση του $z = x + iy$.

B20. Να βρεθεί η τιμή $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = y^3 + ax^2y + 2x^2 - 2y^2$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ με $f(i) = -1 - i$. Να εκφράσετε την f συναρτήσει του z.

B21. Προσδιορίστε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Re} f(x,y) = u(x,y) = e^{-y}\cos x + 3x^2y - y^3$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, και $f(0) = 1 - i$.

B22. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

(α) $u(x,y) = -e^{-x}\sin y + \frac{y^2 - x^2}{2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$.

(β) $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos(2x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 1$.

B23. Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u$ και $f(0) = i$.

B24. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y - \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και στη συνέχεια βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $f(1) = -1$.

B25. Να βρείτε τον μεγαλύτερο τόπο του $\mathbb{C}$ πάνω στο οποίο η συνάρτηση $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ είναι ολόμορφη.

B26. Να προσδιορίσετε τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{Log} z - i\frac{\pi}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη.

B27. Έστω G τόπος στο $\mathbb{C}$. Να βρεθούν όλες οι ολόμορφες συναρτήσεις $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ στο G για τις οποίες ισχυει $v(x,y) = u^2(x,y)$ για κάθε $z = x+iy \in G$.

B28. Έστω $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρεθούν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

B29. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος. Να δείξετε ότι:

(α) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$ τότε η f είναι σταθερή.

(β) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και η $|f|$ είναι σταθερή τότε η f είναι σταθερή.

(γ) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ και $f^5, \overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$ τότε η f είναι σταθερή.

B30. Υποθέτουμε ότι η $f : G \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και ότι για κάθε $z \in G$ ισχύει ότι είτε $f(z) = 0$ ή $f'(z) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

B31. Υποθέτουμε ότι η $f : G \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και ότι η $g(z) = e^{f(z)}$ είναι σταθερή στο G. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

B32. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν η $f(z) = h^3(x,y) + ih(x,y)$ είναι ακέραια συνάρτηση, αποδείξτε ότι η h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

B33. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f \in \mathcal{H}(A)$. Να δείξετε ότι:

(α) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο μιας ευθείας του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

(β) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο ενός κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

B34. Έστω $g : G \to \mathbb{C}$, $g = u + iv$, ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $u(x,y) - v(x,y) = c$ στο G, αποδείξτε ότι η g είναι σταθερή στο G.

B35. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $|a|+|b| \neq 0$ ώστε $a\,\mathrm{Re} f(z) + b\,\mathrm{Im} f(z) + c = 0$ για κάθε $z \in U$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

B36. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f, g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) = \lambda g(z)$ για κάθε $z \in U$.

B37. Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στον τόπο $U \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in U$, τέτοια ώστε η συνάρτηση $u\overline{f}$ να είναι επίσης ολόμορφη. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.